PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

vereinigt mit dem

JAHRBUCH DER RADIOAKTIVITÄT UND ELEKTRONIK

Nr. 2 — 15. Januar 1928 — Redaktionsschluß für Nr. 4 am 10. Februar 1928 — 29. Jahrgang

INHALT:

Originalmitteilungen:

Hedwig Kohn, Methode zur Bestimmung der Zahl angeregter Atomzustände. S. 49.

K. F. Niessen, Über die Schrödingersche Funktion im asymmetrischen Zweizentrenproblem und die Ionenladung in einigen Kristallgittern. S. 52.

A. Sellerio, Beziehungen zwischen Wärmeübergang und Reibung. S. 55.

Felix Bloch, Zur Strahlungsdämpfung in der Quantenmechanik. S. 58.

Vorträge und Diskussionen des IV. Deutschen Physikertages in Kissingen vom 18.–24. September 1927:

Felix Jentzsch, Die Rastermethode. S. 66.

Felix Jentzsch, Beugung des Lichtes an Stahlschneiden und Silberdrähten. S. 72.

Besprechungen:

F. Eisenlohr, Der molekulare Brechungsexponent in der Reihe der Polymethylenverbindungen. S. 72.

H. J. Gramatzki, Leitfaden der astronomischen Beobachtung. S. 72.

Berichtigung. S. 72.

Personalien. S. 72.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Methode zur Bestimmung der Zahl angeregter Atomzustände[1]).

Von Hedwig Kohn.

Bei dem Kirchhoff Bunsenschen Versuch der Linienumkehr beobachtet man bekanntlich Folgendes: Man läßt die Strahlung, die von einem schwarzen Körper oder einer anderen Lichtquelle mit kontinuierlichem Spektrum („umkehrende" Lichtquelle) ausgeht, einen selektiv emittierenden und absorbierenden Dampf (die „umzukehrende" Lichtquelle) durchsetzen. Die von Dampf ausgesandte Spektrallinie hebt sich bald hell, bald dunkel von dem kontinuierlichen Spektrum der „umkehrenden" Lichtquelle ab, je nach der Helligkeit, die man dieser erteilt. Im Grenzfall verschwindet die Spektrallinie; diese Erscheinung hat man im engeren Sinne als „Umkehr" bezeichnet. Sie tritt ein, wenn der Dampf ebensoviel von der Strahlung der „umkehrenden" Lichtquelle absorbiert, wie er selbst emittiert. Die analytische Formulierung für die drei geschilderten Fälle wird durch die Beziehung

$$E_\lambda d\lambda \gtreqless e_{\lambda,T} \cdot A_\lambda d\lambda \qquad (1)$$

gegeben, in welcher $E_\lambda d\lambda$ und A_λ das Emissions- bzw. Absorptionsvermögen des „umzukehrenden" Dampfes für den Spektralbezirk $d\lambda$, im Kirchhoffschen Sinne, bedeuten, $e_{\lambda,T} d\lambda$ das Emssionsvermögen des „umkehrenden" schwarzen Strahlers von der Temperatur T. Ist im besonderen der „umzukehrende" Dampf ein Temperaturstrahler, z. B. eine Bunsenflamme von der Temperatur T_1, also $E_\lambda d\lambda = A_\lambda \cdot e_{\lambda,T_1} d\lambda$, so wird im Falle der „Umkehr"

$$e_{\lambda,T_1} = e_{\lambda,T},$$

d. h. die Temperatur des Dampfes wird unmittelbar durch diejenige des „umkehrenden" schwarzen Strahlers (oder durch die schwarze Temperatur einer beliebigen geeichten Lichtquelle) angegeben. Auf dieser Grundlage hat Féry[1]) eine quantitative Methode der Temperaturbestimmung gasförmiger Temperaturstrahler entwickelt.

Ist der Dampf kein Temperaturstrahler (oder ist der Beweis hierfür noch nicht besonders erbracht[1]), so kann man immerhin formal den Ansatz

$$E_\lambda d\lambda = A_\lambda \cdot e_{\lambda,\bar{T}} p\lambda$$

machen. Die aus der Linienumkehr ermittelte Temperatur $\bar{T}$, die als „Umkehrtemperatur" (U.-T.) oder nach E. Pringsheim[2]) als „spezifische" Temperatur bezeichnet wird, ist dann jedoch keineswegs (oder mindestens nicht ohne weiteres) mit der thermischen Temperatur zu

1) Vorgetragen auf der Gauvereinstagung der Deutsch. Physik. Gesellsch., Breslau, d. 13. Juni 1927.

1) C. L. Féry, „Sur la température des flammes", C. R. **137**, 909, 1903; vgl. ferner H. Kohn, Dissert. Breslau 1913; Ann. d. Phys. **4**, 44, 749, 1914 und die dort angegebene ältere Literatur.

2) E. Pringsheim, Temperaturstrahlung und Luminiszenz, Scientia **13** (7), 174, 1913; Jahresber. der Schles. Ges. f. vaterl. Kultur II. Abt. Naturwiss. Sekt. 93, 1913.

identifizieren; auch variiert sie im allgemeinen mit der Wellenlänge. Indessen kommt der „Umkehrtemperatur" im Rahmen der ursprünglichen Bohrschen Theorie eine einfache und gut verwertbare Bedeutung zu, was im folgenden gezeigt werden soll.

Für die Energiebeträge, die die „umzukehrende" Lichtquelle (Dampf) der einfallenden Strahlung von der Frequenz ν durch Absorption entzieht und durch die eigene Emission wieder zurückerstattet, verwenden wir die von Einstein[1]) bei der Herleitung des Planckschen Strahlungsgesetzes gegebenen Quantenansätze. Wir können uns hierbei auf einen den Raumwin-

kel ω erfüllenden Strahlenkegel (vgl. Fig.) beschränken (der Einfachheit halber sind hier ω und ω' gleich groß gewählt), den man in die „umzukehrende" Lichtquelle eindringen läßt, und in dessen Bereich die „Umkehr" stattfindet. Wie üblich seien N_k und N_i die Zahlen der Atome in den Zuständen k und i, (Ausgangs- und Endzustand für die Emission der Linie ν), und zwar während der Einstrahlung der umkehrenden Lichtquelle; (vgl. hierüber die Diskussion auf S. 51 u. 52), $B_{k,i}$ und $B_{i,k}$ seien die Koeffizienten für die durch Einstrahlung erzwungenen Übergänge ($k \rightarrow i$, $i \rightarrow k$), $A_{k,i}$ die Wahrscheinlichkeit der spontanen Übergänge $k \rightarrow i$ (Ü.-W.), schließlich $u_{\nu,T}$ die Dichte der einfallenden Strahlung. Alsdann hat der im Raumwinkel $\omega' = \omega$ absorbierte Energiebetrag den Wert

$$u_{\nu,T} \cdot h\nu\,(N_i B_{i,k} - N_k B_{k,i}) \frac{\omega}{4\pi},$$

der emittierte Betrag den Wert

$$N_k A_{k,i} \cdot h\nu \frac{\omega}{4\pi},$$

und die Bedingungsgleichung für „Umkehr" erhält die Form

$$u_{\nu,T}\,(N_i B_{i,k} - N_k B_{k,i}) = N_k A_{k,i}. \qquad (2)$$

Die Koeffizienten für die durch Strahlung induzierten Übergänge ersetzen wir durch die spontanen Ü.-W. nach den bekannten, im Strahlungsgleichgewicht gewonnenen Beziehungen

$$g_i B_{i,k} = g_k B_{k,i}$$

$$B_{i,k} = A_{k,i} \frac{g_k}{g_i} \frac{c^3}{8\pi h \nu^3},$$

in denen g_k und g_i die Quantengewichte (Qu.-G.) der betrachteten Zustände bedeuten. Für die Strahlungsdichte $u_{\nu,T}$ ist der Plancksche Ausdruck

$$u_{\nu,T} = \frac{8\pi}{c^3} h\nu^3 \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

einzuführen, dann folgt

$$\frac{N_k}{N_i} = \frac{g_k}{g_i} e^{-h\nu/kT} = \frac{g_k}{g_i} e^{-\varepsilon_k/kT}. \qquad (3)$$

Durch die Strahlungsdichte oder die Temperatur T des „umkehrenden" schwarzen Strahlers, d. i. aber die Umkehrtemperatur des betrachteten Dampfes, wird also das Verhältnis der Zahl der Zentren in den beiden stationären Zuständen k und i bestimmt, wenn das Verhältnis der Qu.-G. als bekannt vorausgesetzt wird[1]).

Das gewonnene Resultat leuchtet unmittelbar ein. Denn in dem betrachteten Strahlenkegel ω (und für den schmalen Frequenzbereich $d\nu$ an der Frequenz ν) haben wir bei „Umkehr" den Dampf quasi zu einem schwarzen Strahler von der Temperatur T und der Strahlungsdichte $u_{\nu,T}$ gemacht; was ihm selbst zu dieser Strahlungsdichte fehlt, wird durch den nichtabsorbierten Betrag der eingestrahlten Energie ergänzt. (Würde man den Dampf unbemerkt entfernen, so könnte der Beobachter, der im Spektrum des schwarzen Körpers auf „Umkehr" eingestellt hat, dies gar nicht gewahrwerden.) Daher gilt hier, d. h. in dem betrachteten Kegel (unabhängig davon, was in dem durchstrahlten Volumen in anderen Richtungen vor sich geht), die in Gleichung (2) zum Ausdruck kommende Bedingung für Hohlraumstrahlung: Gleichheit der Zahl der durch Strahlung induzierten Übergänge $i \rightarrow k$ mit der Summe der spontanen und durch Einstrahlung induzierten Übergänge $k \rightarrow i$; und aus dieser Bedingung ist das Verhältnis N_k/N_i eindeutig gegeben.

Für einen Temperaturstrahler ist das Resultat selbstverständlich; denn da für ihn, wie oben ausgeführt, die U.-T. mit seiner wahren Temperatur T identisch ist, so ist die Gleichung

$$\frac{N_k}{N_i} = \frac{g_k}{g_i} e^{-h\nu/kT} = \frac{g_k}{g_i} e^{-h\nu/kT}$$

nichts anderes als der Ausdruck für Boltzmannsche Verteilung bei der Temperatur $T = T$. Nun ist aber die obige Formulierung der Umkehrbedingung ganz unabhängig davon entwickelt worden, ob der leuchtende und absorbierende Dampf ein Temperaturstrahler ist oder nicht,

1) A. Einstein, Physik. Zeitschr. **18**, 121, 1917.

1) Im Sinne der Schrödingerschen Wellenmechanik bildet die Umkehrtemperatur ein Maß für die Erregungsstärke („Amplitudenquadrat") der Eigenschwingung, die einem bestimmten Eigenwert (Zustand, Therm) zugehört.

d. h. unabhängig davon, ob die Anregungszustände nur durch die der Temperatur entsprechenden Zusammenstöße geschaffen werden oder durch elektrische Entladungen, chemische Prozesse, u. a. m. bzw. durch die mit ihnen verknüpften Stöße 1. und 2. Art. Die Verwendung der Umkehrmethode zur Bestimmung der Zahl angeregter Atomzustände und die sich hieraus ergebende Deutung der „Umkehrtemperatur" oder „spezifischen Temperatur" ist also eine ganz allgemeine, unabhängig von der Art des Anregungsprozesses.

Die Methode vereinfacht sich praktisch sehr, wenn es nur auf einen Vergleich der Zentrenzahlen für Linien mit verschiedenem Ausgangs- und gemeinsamem Endzustand bzw. gemeinsamem Ausgangs- und verschiedenem Endzustand ankommt. Beide Fälle liegen bei dem Vergleich der Atomzahlen in den Teilniveaus der Multiplett-Therme vor. Der erste Fall kommt im besonderen bei dem Vergleich der Atomzahlen in den Ausgangsniveaus für die Linien ein und derselben Serie in Betracht.

Sind z. B. k_1 und k_2 die Ausgangsniveaus für die Linien λ_1 und λ_2 (bei gleichem Endniveau), $e_{\lambda_1, T_1} d\lambda$ und $e_{\lambda_2, T_2} d\lambda$ die den U.-T. T_1 und T_2 entsprechenden Helligkeiten der „umkehrenden" Lichtquelle (wahre Temperatur bei schwarzem Körper, schwarze Temperatur bei beliebigem Strahler), so ist einerseits

$$\frac{N_{k_2}}{N_{k_1}} = \frac{g_{k_2}}{g_{k_1}} e^{-c_2\left(\frac{1}{\lambda_2 T_2} - \frac{1}{\lambda_1 T_1}\right)},$$

anderseits, (im Geltungsbereich der Wienschen Strahlungsformel),

$$V_{2,1} = \frac{e_{\lambda_2, T_2}}{e_{\lambda_1, T_1}} = \frac{\lambda_2^{-5} e^{-c_2/\lambda_2 \cdot T_2}}{\lambda_1^{-5} e^{-c_2/\lambda_1 \cdot T_1}}$$

also

$$\frac{N_{k_2}}{N_{k_1}} = \frac{g_{k_2}}{g_{k_1}} \frac{e_{\lambda_2, T_2}}{e_{\lambda_1, T_1}} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^5 = \frac{g_{k_2}}{g_{k_1}} \cdot V_{2,1} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^5. \quad (3a)$$

Die absolute Eichung der „umkehrenden" Lichtquelle erübrigt sich also; nach der Einstellung auf „Umkehr" ist lediglich das Helligkeitsverhältnis $V_{2,1}$ durch heterochromen Vergleich von e_{λ_2, T_2} und e_{λ_1, T_1} zu bestimmen.

Bei engbenachbarten Multiplettkomponenten ($\lambda_2 = \lambda_1 = \lambda$) wird

$$\frac{N_{k_2}}{N_{k_1}} = \frac{g_{k_2}}{g_{k_1}} e^{-\frac{c_2}{\lambda}\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right)}. \quad (3b)$$

Findet man gleiche U.-T., so liegt sogenannte „natürliche Anregung" vor, bei der die Atomzahlen in den Teilniveaus im Verhältnis der Qu.-G. stehen.

Die geschilderte Methode der Linienumkehr, speziell in der soeben gegebenen Vereinfachung, kann unter anderen dazu verwendet werden, die Zahl der Atome (Anreicherung) in metastabilen Zuständen, wie sie von Meißner[1]), Ladenburg[2]), Dorgelo[3]) in elektrisch angeregten Gasen beobachtet und gemessen wurde, im Vergleich zu der in gewöhnlichen Zuständen quantitativ zu ermitteln. Solche Versuche sind in Angriff genommen. Das Wesentliche ist, daß man nach der Umkehrmethode, die ja, wenn man so will, bereits eine kombinierte Emissions- und Absorptionsmessung darstellt, unmittelbar Atomzahlen (N) mißt, und nicht — wie bei Absorptions-, Dispersions-, Emissionsmessungen — nur die Zahl ($\mathfrak{N}$) der Dispersionselektronen (Stärke der Ersatzoszillatoren).

Kombiniert man z. B. innerhalb einer Serie die Linienumkehrmessung mit der Intensitätsmessung der einzelnen Glieder, so ergibt sich das Verhältnis ihrer Ü.-W., vorausgesetzt, daß das Qu.-G. des Ausgangszustandes innerhalb der Serie konstant bleibt.

Es darf nicht übersehen werden, daß durch die äußere Einstrahlung bei der Umkehrmessung das Gleichgewicht in dem umzukehrenden Dampfstrahler gegenüber seinem Zustand ohne äußere Einstrahlung verschoben werden wird; die Verteilungszahlen werden geändert werden, man bestimmt das Verhältnis N_k / N_i bei gleichzeitiger äußerer Einstrahlung[4]).

Gleichzeitige Intensitätsmessungen in einem nichtdurchstrahlten Volumen und einem solchen, welches von der auf „Umkehr" abgeglichenen Strahlung durchsetzt wird, können über die Größe der Änderung von N_k Aufschluß geben. Früher haben wir, um festzustellen, ob und wie sehr das Temperaturgleichgewicht in einer Bunsenflamme gestört würde, solche Helligkeitsmessungen während des Umkehrversuches an den D-Linien angestellt, aber keine, außerhalb der Fehlergrenze liegende, Änderung konstatieren können[5]). Daß die Änderung aber auch wesentliche Beträge annehmen kann, folgt aus der Tatsache, daß sich ja beträchtliche Resonanzstrahlung durch äußere Einstrahlung erzielen läßt, im besonderen, wenn der Endzustand für die betreffende Emissionslinie ein metastabiler ist[6]).

1) K. W. Meißner, Ann. d. Phys. **76**, 124, 1925; Physik. Zeitschr. **26**, 687, 1925.

2) R. Ladenburg, H. Kopfermann u. Agathe Carst, Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wissensch. 255, 1926; s. a. Naturwiss. **14**, 1208, 1926.

3) H. B. Dorgelo, Zeitschr. f. Phys. **34**, 760, 1925; **36**, 467, 1926; Physika **5**, 429, 1925.

4) Diskussionen mit Herrn Ladenburg im Anschluß an meinen Bericht auf dem Breslauer Gautag haben die Aufmerksamkeit besonders auf diesen Punkt gelenkt.

5) H. Kohn, l. c.: H. Senftleben, Dissert. Breslau 1915, Ann. d. Phys. **47**, 966, 1915.

6) K. W. Meißner, Zeitschr. f. Phys. **43**, 449, 1927; hier auch weitere Literaturangaben; W. de Groot, Naturw. **14**, 104, 1926.

Die durch die Einstrahlung bewirkte Änderung ist in allen solchen Fällen von Bedeutung, in denen man gerade die Verteilung bei gegebenen Bedingungen, elektrischen, chemischen usw. ohne äußere Einstrahlung kennen lernen möchte; in diesen Fällen wird sie durch Hilfsmessungen zu eliminieren sein. Die Störung ist jedoch bedeutungslos, wenn man z. B., wie oben erwähnt, durch kombinierte Umkehr- und Intensitätsmessung relative Werte der Ü.-W. ermitteln will; in solchen Fällen müssen dann eben nur die Intensitätsmessungen während der äußeren Einstrahlung ausgeführt werden.

Die hier gegebene Deutung des Umkehrversuches soll in erster Anwendung zur Diskussion der Resultate herangezogen werden, die wir im vorigen Jahr[1]) für das Intensitätsverhältnis der Dublettkomponenten des 2. *Cs*-Hauptseriengliedes gewonnen haben. Nach der holländischen Intensitätsregel III[2]) wäre hierfür der Wert des Verhältnisses der Quantengewichte der Ausgangsniveaus, also 2 : 1, zu erwarten gewesen, während die Messungen angenähert 4 : 1 ergaben. Bevor man dazu übergeht, aus dieser Diskrepanz den Schluß auf eine Verschiedenheit in den Ü.-W. für die beiden Komponente zu ziehen, ist streng genommen noch der Beweis zu erbringen, daß die Zahlen der Atome in den beiden Ausgangsniveaus im Verhältnis der Qu.-G. dieser Zustände stehen. Im allgemeinen hat man dies bei so eng benachbarten Niveaus als selbstverständlich angenommen, zumal in Flammen, wo thermische Anregung vorausgesetzt wird. Indessen ist für die Knallgasflamme, die bei den genannten Intensitätsmessungen verwendet wurde, der Nachweis der Temperaturstrahlung — etwa in der Form wie früher für die Bunsenflamme[2]) — bisher nicht erbracht worden.

Es wurden daher in der Knallgasflamme Umkehrmessungen an den beiden Komponenten des 2. *Cs*-Dubletts (4555/4593 Å) vorgenommen. Als „umkehrende" Lichtquelle diente der positive Krater des Kohlelichtbogens, dessen Helligkeit durch Nicolsche Prismen meßbar geschwächt wurde. Die Flamme mußte relativ stark gefärbt werden, damit die Absorption, die an 2. Hauptseriengliedern ja schon beträchtlich gegenüber der am 1. herabgedrückt ist, die dunklen Linien genügend kraß aus dem Spektrum heraustreten ließ, um genaue Einstellungen vornehmen zu können. Die „Umkehr"-Messungen fielen auf 5 Proz. genau aus (bezogen auf die Helligkeit der „umkehrenden" Lichtquelle) und ergaben innerhalb dieser Fehlergrenze gleiche Umkehrtemperatur der beiden Komponenten. Innerhalb etwa 5 Proz. stehen also nach Gleichung (3b) die Atomzahlen in den Ausgangsniveaus der beiden Komponenten des 2. *Cs*-Hauptseriengliedes im Verhältnis ihrer Qu.-G., wobei es im Sinne der Methode dahingestellt bleibt, ob in dem untersuchten Fall (Knallgasflamme) Temperaturstrahlung vorliegt oder nicht. (Die angegebene Fehlergrenze schließt bereits die kleine Änderung ein, die sich bei Boltzmannscher Verteilung infolge der Wellenlängendifferenz von etwa 4 $m\mu$ in den Umkehreinstellungen für die beiden Komponenten streng genommen zeigen müßte und eine entsprechende Abweichung des Verhältnisses $\frac{N_{k_2}}{N_{k_1}}$ von dem der Qu.-G. $\left(\frac{g_{k_2}}{g_{k_1}}\right)$ bedingt.)

1) H. Kohn und H. Jakob, Physik. Zeitschr. **27**, 819, 1926.

2) H. C. Burger und H. B. Dorgelo, Zeitschr. f. Phys. **23**, 258, 1924.

Breslau, Physikalisches Institut der Universität, November 1927.

(Eingegangen 21. November 1927.)

Über die Schrödingersche Funktion im asymmetrischen Zweizentrenproblem und die Ionenladung in einigen Kristallgittern.

Von K. F. Niessen.

Zusammenfassung.

Wird ein Elektron angezogen von zwei Attraktionszentren mit ungleicher positiver Ladung (sagen wir $k_1 e$ links und $k_2 e$ rechts, während $k_1 < k_2$), so wird gezeigt, daß die nullte Schrödingersche Funktion ψ in zwei Punkten, welche symmetrisch in bezug auf die Mittelebene liegen, auch links und rechts verschieden ist und zwar rechts größer als links. Für die physikalische Bedeutung dieses Resultates sehe man den Schluß der Abhandlung.

§ 1.

Sind r_1 und r_2 die Abstände vom Elektron zum linken bzw. rechten Zentrum, so lautet die Schrödingersche Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+\frac{8\pi^2 m}{h^2}\left(E+\frac{k_1 e^2}{r_1}+\frac{k_2 e^2}{r_2}\right)\psi=0 \qquad (1)$$

worin E die Energiekonstante darstellt.

Befinden sich die Zentren in den Punkten:

$$x=-c,\ y=0,\ z=0$$
$$x=+c,\ y=0,\ z=0,$$

und führt man elliptische Koordinaten ein:

$$\lambda = \frac{r_1 + r_2}{2c}$$

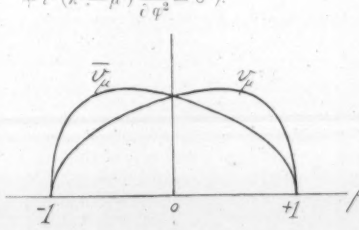
$$\mu = \frac{r_1 - r_2}{2c}$$

φ = Winkel zwischen einer festen und einer beweglichen Ebene, beide durch die x-Achse, und bedient man sich noch der dimensionslosen Größen:

$$\varepsilon = \frac{2c}{a_H}, \qquad \gamma = \frac{E\varepsilon^2}{4E_H},$$

worin a_H den ersten Bohrschen Radius und E_H die Energie im unangeregten H-Atom darstellt; so geht die Differentialgleichung (1) über in:

$$\begin{aligned}(\lambda^2-1)\frac{c^2\psi}{c\lambda^2} + 2\lambda\frac{c\psi}{c\lambda} + [(k_1+k_2)\varepsilon\lambda - \gamma\lambda^2]\psi \\ + (1-\mu^2)\frac{c^2\psi}{c\mu^2} - 2\mu\frac{c\psi}{c\mu} \\ + [(k_1-k_2)\varepsilon\mu + \gamma\mu^2]\psi \\ + c^2(\lambda^2-\mu^2)\frac{c^2\psi}{c\varphi^2} = 0\ ^1).\end{aligned} \tag{2}$$



Schreibt man die Lösung in der Form:

$$\psi = \psi_\lambda(\lambda)\cdot\psi_\mu(\mu)\cdot\psi_\varphi(\varphi), \tag{3}$$

so stellt sich heraus, wie bei Burrau, daß

$$\psi_\varphi = a\cos(n_\varphi\varphi + b).$$

Wir interessieren uns nur für die nullte Eigenfunktion, so daß ψ keine Nullpunkte haben soll, und deshalb

$$n_\varphi = 0$$

und einfach:

$$\psi = \psi_\lambda(\lambda)\,\psi_\mu(\mu)$$

zu setzen ist.

Nach Einführung einer „Separationskonstante" A läßt sich die Differentialgleichung (2) zerlegen in:

$$\begin{aligned}(\lambda^2-1)\frac{c^2\psi_\lambda}{c\lambda^2} + 2\lambda\frac{c\psi_\lambda}{c\lambda} \\ + [A + (k_1+k_2)\varepsilon\lambda - \gamma\lambda^2]\psi_\lambda = 0\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}(1-\mu^2)\frac{c^2\psi_\mu}{c\mu^2} - 2\mu\frac{c\psi_\mu}{c\mu} \\ + [-A + (k_2-k_1)\varepsilon\mu + \gamma\mu^2]\psi_\mu = 0.\end{aligned} \tag{5}$$

Diese sind vom Typus:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Q = 0,$$

welche mittels des Ansatzes:

$$\left.\begin{aligned} y &= v\cdot w \\ w &= e^{-\frac{1}{2}\int P\,dx}\end{aligned}\right| \tag{6}$$

auf eine Differentialgleichung ohne ersten Differentialquotienten:

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \left(-\frac{1}{4}P^2 - \frac{1}{2}\frac{dP}{dx} + Q\right)v = 0$$

zurückgeführt wird.

Wir möchten nun zeigen, daß im Zweizentrenproblem mit

$$k_1\,(\text{links}) < k_2\,(\text{rechts})$$

für zwei in bezug auf der Mittelebene symmetrisch gelegenen Punkte[1])

$$\lambda_0, -\mu_0, \varphi_0\,(\text{links}),\quad \lambda_0, +\mu_0, \varphi_0\,(\text{rechts})$$

immer

$$\psi(\lambda_0, -\mu_0, \varphi_0) < \psi(\lambda_0, +\mu_0, \varphi_0)$$

also nach (3), daß immer

$$\psi_\mu(-\mu_0) < \psi_\mu(+\mu_0)^{\,2}).$$

Für diesen Zweck brauchen wir die Transformation (6) nur auf die Differentialgleichung (5) anzuwenden.

Wir bekommen dann mit:

$$\left.\begin{aligned} \psi_\mu &= w_\mu v_\mu \\ w_\mu &= \frac{1}{\sqrt{1-\mu^2}}\end{aligned}\right|$$

$$\frac{d^2v_\mu}{d\mu^2} + K_\mu v_\mu = 0 \tag{7}$$

mit der Abkürzung:

$$K_\mu = \frac{1 + [-A + p\varepsilon\mu + \gamma\mu^2](1-\mu^2)}{(1-\mu^2)^2}, \tag{7a}$$

$$p = k_2 - k_1 > 0.$$

Der elliptische Koordinat μ bewegt sich zwischen

$$-1 \le \mu \le +1.$$

Für $\mu = \pm 1$ wird aber $w_\mu = \infty$. Damit ψ dort nicht unendlich werde, legen wir v_μ die Forderung auf:

$$v_\mu(-1) = 0, \quad v_\mu(+1) = 0.$$

1) Die Ableitung der Differentialgleichung für $k_1 = k_2 = 1$ findet man in O. Burrau, Berechnung des Energiewertes des Wasserstoffmolekelions (H_2^+) im Normalzustand. Det. Kgl. Danske Videnskabernes Selskab **7**, 14, 1927.

1) In der ganzen Abhandlung verstehen wir unter μ_0 immer einen beliebigen positiven Wert von μ; also $0 < \mu_0 < 1$.

2) An und für sich wäre ein derartiges Verhalten der ψ-Funktion zu erwarten, da man ja weiß, daß im Falle der nullten Eigenfunktion, d. h. des Normalzustandes, die Ladung des Elektrons im Grenzfall sehr großen Abstandes der Zentren sich ganz auf die Umgebung des stärkst geladenen Zentrums zusammenzieht. (Hund, Zeitschr. f. Phys. **40**, 742, 1927.)

Aus der Differentialgleichung (7) folgt dann nämlich, daß ψ in diesen Punkten verschwindet wie

$$C\sqrt{1 \pm \mu},$$

denn die Taylorentwicklung:

$$v_\mu = (\mu \pm 1)^\alpha [P + Q(\mu \pm 1) + \ldots]$$

$$K_\mu = \frac{1}{(\mu \pm 1)^2}\left[\frac{1}{4} + L(\mu \pm 1) + \ldots\right]$$

ergibt in der Differentialgleichung (7) für α:

$$\alpha = \frac{1}{2},$$

so daß der Limes von

$$\psi_\mu = \frac{v_\mu}{\sqrt{1-\mu^2}}$$

für $\mu = \pm 1$ endlich bleibt.

Wir brauchen also von der Differentialgleichung (7) nur die Eigenfunktionen, und zwar die nullte, da ψ ohne Nullpunkte sein soll.

Sei $v_\mu(\mu)$ diese gesuchte (normierte) Eigenfunktion, dann ist aus Symmetrieüberlegungen deutlich, daß die folgendermaßen definierte Funktion $v_\mu(\mu)$

$$v_\mu(\mu) = v_\mu(-\mu) \tag{8}$$

die normierte Eigenfunktion sein wird, im Falle k_1 und k_2 vertauscht werden (vgl. Fig. 1).

Die Funktionen v_μ und v_μ genügen also den Gleichungen:

$$\frac{d^2 v_\mu}{d\mu^2} + \frac{1 + [-A + \rho\varepsilon\mu + \gamma\mu^2](1-\mu^2)}{(1-\mu^2)^2} v_\mu = 0 \tag{9}$$

$$\frac{d^2 v_\mu}{d\mu^2} + \frac{1 + [-A - \rho\varepsilon\mu + \gamma\mu^2](1-\mu^2)}{(1-\mu^2)^2} v_\mu = 0 \tag{10}$$

$$v_\mu(\pm 1) = 0, \quad v_\mu(\pm 1) = 0, \quad \rho > 0.$$

Wir wollten beweisen:

$$v_\mu(-\mu_0) < v_\mu(+\mu_0).$$

Es genügt also zu zeigen:

$$v_\mu(+\mu_0) < v_\mu(+\mu_0).$$

Dazu multiplizieren wir Gleichung (9) mit v_μ und subtrahieren hiervon die mit v_μ multiplizierte Gleichung (10), wonach wir erhalten:

$$v_\mu \frac{d^2 v_\mu}{d\mu^2} - v_\mu \frac{d^2 v_\mu}{d\mu^2} = -\frac{2\rho\varepsilon\mu}{1-\mu^2} v_\mu v_\mu.$$

Im rechten Glied sind v_μ und v_μ als nullte Funktionen überall positiv, also ist das rechte Glied für $\mu > 0$ überall negativ, so daß:

$$\text{für } \mu > 0: \quad \frac{d}{d\mu}\left(v_\mu \frac{d v_\mu}{d\mu} - v_\mu \frac{d v_\mu}{d\mu}\right) < 0. \tag{11}$$

Nach der erwähnten Taylorentwicklung hat man in der Gegend von $\mu = \pm 1$:

$$v_\mu = P(1-\mu)^{\frac{1}{2}}, \quad v_\mu = P(1-\mu)^{\frac{1}{2}}$$

so daß für $\mu = +1$ die Produkte $v_\mu \frac{d v_\mu}{d\mu}$, $v_\mu \frac{d v_\mu}{d\mu}$ endlich bleiben und:

$$v_\mu \frac{d v_\mu}{d\mu} - v_\mu \frac{d v_\mu}{d\mu} = 0. \tag{12}$$

Aus (11) und (12) folgt dann für $0 < \mu < 1$:

$$v_\mu \frac{d v_\mu}{d\mu} - v_\mu \frac{d v_\mu}{d\mu} > 0.$$

Dividiert man durch den positiven Wert $(v_\mu)^2$, dann hat man

$$\frac{d}{d\mu}\left(\frac{v_\mu}{v_\mu}\right) > 0. \tag{13}$$

In Fig. 1 sieht man aber:

$$v_\mu(0) = v_\mu(0),$$

so daß der Quotient v_μ/v_μ auf der Mittelebene ($\mu = 0$) eins und wegen (13) nach rechts immer größer wird, woraus:

$$v_\mu(-\mu_0) > v_\mu(+\mu_0),$$

was nach (8) nichts anderes ist als:

$$v_\mu(-\mu_0) < v_\mu(+\mu_0),$$

woraus wieder die in der Zusammenfassung erwähnte Beziehung folgt:

$$\psi(\lambda_0, -\mu_0, \varphi_0) < \psi(\lambda_0, +\mu_0, \varphi_0).$$

§ 2.

Physikalische Bedeutung dieses Resultats.

Da ψ^2 der Dichte der Elektronenladung proportional ist, hat dieses Resultat Interesse für das Studium der homopolaren Bindung, für die Ladungsverteilung der streuenden Elektronen in Kristallgittern und so für die Intensität des gestreuten Röntgenlichtes.

Könnte man die Bindung zweier positiven Attraktionszentren nach der klassischen Quantentheorie beschreiben mittels eines Elektrons, das eine Ellipse um die beiden Zentren als Brennpunkte beschreibt, so ergibt sich, daß das Elektron sich im Durchschnitt länger in der Nähe des schwächeren und kürzer in der Nähe des stärker geladenen Zentrums aufhält[1]), so daß die Elektronenladung rechts kleiner als links sein würde. Dagegen erhielten wir in § 1 gerade: ψ^2 links $< \psi^2$ rechts.

Hier geben die alte und die neue Quantentheorie also Effekte in entgegengesetzter Richtung.

Die alte läßt in einer homopolaren Bindung große Unterschiede in den Gesamtladungen links und rechts erwarten, selbst größer als $(k_2 - k_1)e$.

Nach der neuen Theorie wird die „Elektronenwolke" gerade versuchen den Ladungsunterschied zwischen links und rechts auszugleichen.

Daß letzterer Effekt der richtige ist, beweisen die Messungen von Ott[2]), der aus Röntgendiagrammen für *SiC*, *AlN*, *BeO*, *ZnS* ge-

funden hat, daß das Reflexionsvermögen der Ionen in diesen Gittern annähernd einer Annahme neutraler Atome entspricht.

Wie man die Theorie solcher Gitter (im allgemeinen aller Gitter von Diamant- oder Wurzittyp) mit dem Zweizentrenproblem in Verbindung bringen kann, hat Verfasser schon früher (l. c.) gezeigt. Die Attraktionszentren $k_1 e$ und $k_2 e$ sind dann die Atomreste (nach der Grimm-Sommerfeldschen Viererschalentheorie[3]) immer positiv geladen), d. h. die Atome nach Abgabe all ihrer äußeren Elektronen, so daß k gleichzeitig die Reihe des periodischen Systems angibt, worin das neutrale Atom stand. Die losgerissenen Elektronen (und es gibt deren viele, denn $k_1 + k_2 = 8$ in diesen Verbindungen) können nun so verteilt werden, daß jeweils zwei für die Bindung zweier benachbarten ungleichartiger Atomreste sorgen. Rührte die Bindung nur von einem Elektron her, das wie in obiger Rechnung nach der Wellenmechanik „räumlich verteilt" wird, so ist die Ladung der „Elektronwolke" um die Zentra $k_1 e$ und $k_2 e$ bzw.

$$-\left(\frac{1}{2}-\delta\right)e \quad \text{und} \quad -\left(\frac{1}{2}+\delta\right)e,$$

wo als Hauptergebnis unserer Rechnung in § 1:

$$0 < \delta < \frac{1}{2}.$$

Im Falle von zwei bindenden Elektronen wird man also für die Ladung erwarten:

$$-(1-\delta')e \text{ und } -(1+\delta')e,$$

wo nun:

$$0 < \delta' < 1.$$

In den betrachteten Gittern ist jeder Atomrest nur mit andersartigen, und zwar mit deren vier verbunden, so daß die resultierende Ladung um die Reste $k_1 e$ und $k_2 e$ sein wird:

$$-(4-\delta'')e \text{ und } -(4+\delta'')e,$$

wo nun:

$$0 < \delta'' < 4 \tag{14}$$

und die Gesamtladung der Ionen deshalb:

$$(k_1 - 4 + \delta'')e \text{ und } (k_2 - 4 - \delta'')e,$$

wobei zu bedenken ist, daß wegen

$$\left.\begin{aligned} k_1 &< k_2 \\ \text{noch gilt:} \\ k_1 &< 4 \\ k_2 &> 4 \\ \text{und weiter} \\ k_1 + k_2 &= 8. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Nun hat Ott gefunden, daß diese Gesamtladungen praktisch null sind, also daß:

$$k_1 - 4 + \delta'' = 0$$
$$k_2 - 4 - \delta'' = 0,$$

woraus:

$$\delta'' = \frac{k_2 - k_1}{2}. \tag{16}$$

Das stimmt nach (15) also gerade mit der Ungleichheit (14).

Hätten wir, wie Verfasser es früher getan hat, die Rechnung gegründet auf der klassischen Ellipsenbahn eines Elektrons, so würde δ und damit auch δ'' negativ ausgefallen sein, und wir hätten bekommen:

$$-4 < \delta'' < 0,$$

was dem Wert (16) aus den Messungen von Ott widerspricht[1]).

Auch hier kann also die Wellenmechanik die Schwierigkeiten qualitativ auflösen, worauf man in der alten Quantentheorie gestoßen war.

1) Die damaligen Resultate waren trotzdem noch bedeutend besser wie die nach der Achterschalentheorie, in welcher die äußeren Elektronen des einen Atoms bei der Bindung die Lücke in der äußeren Schale des anderen Atoms ausfüllen.

Utrecht, 9. November 1927.

(Eingegangen 14. November 1927.)

1) K. F. Niessen, Physik. Zeitschr. **27**, 300 1926.
2) H. Ott, Zeitschr. f. Krist. **61**, 529, 1925; 62, 217, 1925; Zeitschr. f. Phys. **22**, 212, 1924.
3) H. Grimm und A. Sommerfeld, Zeitschr. f. Phys. **36**, 36, 1926.

Beziehungen zwischen Wärmeübergang und Reibung.

Von A. Sellerio.

1. Vor kurzem ist von zwei voneinander unabhängigen Seiten eine sehr wichtige Beziehung zwischen Wärmeübergangszahl und Reibungszahl aufgestellt worden, welche, nach ihren Entdeckern, die van Iterson-Lorenzsche Gleichung benannt werden darf[1]).

Der Klarheit halber, wollen wir die Bezeichnungen die wir brauchen werden, ausdrücklich definieren.

D Röhrendurchmesser. Es finden in der Röhre gleichzeitig turbulente Bewegung und Wärmeübergang zwischen Wand und (tropfbarer oder gasförmiger) Flüssigkeit statt. Falls der Querschnitt nicht kreisförmig ist, wird mit D der mittlere oder hydraulische Durchmesser gemeint;

T_s (konstante) Temperatur der inneren Wandfläche;

1) Siehe H. Lorenz, Physik. Zeitschr. **28**, 446, 1927. Die im Nachtrag, S. 618, zitierte Arbeit von van Iterson (1926) ist mir im Original nicht bekannt. Eine ähnliche Gleichung hat übrigens (1926) Prof. ten Bosch aufgestellt, die in seinem Werke „Die Wärmeübertragung" 2. Aufl. wiedergegeben ist.

T_m mittlere Temperatur der Flüssigkeit;
u_m mittlere Geschwindigkeit der Flüssigkeit;
μ spezifische Masse, bezogen auf Raumeinheit;
c_p spezifische Wärme, bezogen auf Masseneinheit, bei konstantem Druck;
λ sogenannte Reibungszahl;
h Wärmeübergangszahl zwischen Wand und Flüssigkeit.

In einer Schicht der Länge dx, entstehen ein Druckabfall dp, und gleichzeitig eine Temperaturerhöhung dT, infolge des Wärmeaustausches dQ zwischen Wand und Flüssigkeit. Definitionsmäßig hat man bekanntlich

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\lambda}{D}\,\frac{\mu}{2}\,u_m^2 \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} dQ &= h\,(T_s - T_m)\cdot \pi D\,dx \\ dQ &= \frac{\pi D^2}{4}\,u_m \cdot \mu\, c_p \cdot dT \end{aligned}\right\}$$

Daher

$$\frac{dT}{dx} = \frac{\pi D \cdot h\,(T_s - T_m)}{\frac{\pi D^2}{4}\,u_m \cdot \mu\, c_p} \qquad (2)$$

In unseren Bezeichnungen, lautet die oben erwähnte Gleichung

$$h = \frac{\lambda}{8}\cdot \mu\, c_p \cdot u_m \qquad (I)$$

(van Iterson, Lorenz). Gewiß hat dieselbe keinen Anspruch auf hohe Genauigkeit, doch ist sie, sowohl wissenschaftlich wie technisch, sehr willkommen zu heißen, und das um so mehr als ihre Form eine sehr einfache ist[1]).

Man darf aber nicht vergessen, daß schon längst (1874) die beiden Erscheinungen: Wärmeübergang und Reibung, durch die bekannte Reynoldssche Gleichung

$$H = \frac{R \cdot c_p\,(T_s - T_m)}{u_m} \qquad (II)$$

(Reynolds) verknüpft sind.[4] Es wäre sonderbar, wenn Gleichung (I) und (II) voneinander unabhängig wären. Es sind ja Wärmeübergang und Strömung durch je einen einzigen Parameter bestimmt, so daß zwischen beiden Erscheinungen nur eine Verknüpfungsgleichung existieren kann. Es gibt, mit anderen Worten, von vornherein nur zwei Möglichkeiten: entweder sind Gleichung (I) und (II) gleichwertig, oder sie sind miteinander unverträglich.

Wir wollen zeigen, daß der erste Fall vorliegt.

Zu diesem Zweck, weisen wir hin auf die Bedeutungen von H, R in der Reynoldsschen Gleichung.

R ist die Reibungskraft bezogen auf die Flächeneinheit. Im Beharrungszustand folgt offenbar aus dem dynamischen Gleichgewicht der Kräfte

$$\frac{\pi D^2}{4}\,p, \quad -\frac{\pi D^2}{4}\,(p - dp), \quad -R\cdot \pi D \cdot dx,$$

die in der Schicht dx wirken,

$$R = \frac{\frac{\pi D^2}{4}\,dp}{\pi D\,dx} \qquad (3)$$

H bedeutet den Wärmefluß zwischen Wand und Flüssigkeit, bezogen auf Flächeneinheit und Zeiteinheit, d. h.:

$$H = \frac{\frac{\pi D^2}{4}\,u_m \cdot \mu\, c_p \cdot dT}{\pi D \cdot dx} \qquad (4)$$

Aus (1), (3), bzw. (2), (4), folgt

$$R = \frac{\lambda\,\mu}{8}\,u_m^2 \qquad (5)$$

$$H = h\,(T_s - T_m). \qquad (6)$$

Wenn man nun (5), (6) in (I) setzt, erhält man (II). Umgekehrt, kann man (I) aus (II) ableiten.

Die Gleichwertigkeit beider Gleichungen ist somit bewiesen. Diese Feststellung bringt vielen Nutzen mit sich. Erstens, ist durch die Zurückführung der van Iterson-Lorenzschen Gleichung auf diejenige von Reynolds die Zuhilfenahme neuer Hypothesen oder Kunstgriffe entbehrlich. Zweitens gelten alle experimentelle Bestätigungen der Reynoldsschen Formel gleichzeitig als indirekte Bestätigungen der Gleichung von van Iterson und Lorenz. Dieser Punkt ist wichtig, in Anbetracht der Spärlichkeit des Erfahrungsmaterials.

Der Gültigkeitsbereich von Gleichung (II) ergibt sich ohne weiteres aus den Versuchen, die man angesichts der Gleichung (I) angestellt hat, von denen diejenigen Stantons[1]) besonders zu erwähnen sind.

2. Nun kann man einen Schritt weiter tun.

Schon Reynolds war damit nicht zufrieden, daß in seiner Formel die Wärmeleitzahl der Flüssigkeit, die sicherlich eine Rolle spielt, nicht zum Vorschein kam. Dieselben Bedenken kann man selbstverständlich gegen Gleichung (I) haben. Den Grund dieses Mangels, welcher die Genauigkeit der Formel beeinträchtigt, ist leicht zu erkennen, wenn man die schöne Ableitung der Reynoldsschen Formel, die von T. E. Stanton gegeben worden ist, ins Auge faßt[2]).

1) Es sei bemerkt, daß μc_p die spezifische Wärme bezogen auf Raumeinheit bedeutet, und daß bei tropfbaren Flüssigkeiten statt c_p einfach c geschrieben werden kann.

1) Stanton, Phil. Trans. Roy. Soc. A. 190.

2) Diese Ableitung ist von demselben Verfasser im Glazebrooks Dictionary of applied Physics, Bd. I, Schlagwort „Friction" wiedergegeben. Die Grundidee von Lorenz, in dem zitierten Aufsatz, ist nahe verwandt mit derjenigen Stantons.

Mathematisch gesprochen, handelt es sich um eine dritte Beziehung zwischen den Differentialen dx, dp, dT, die schon durch (1), (2) verbunden sind, zu finden. Eine solche Beziehung wird gewonnen durch den physikalisch gesunden Gedanken, daß je größer der Flüssigkeitsanteil ist, der durch Wirbelung an die Wand gerät, desto größer sind gleichzeitig der Verlust an Bewegungsgröße und der Wärmeaustausch zwischen Wand und Flüssigkeit. In der Beweisführung Stantons ist angenommen, daß die Turbulenz bis zur Wand der Röhre sich erstreckt, während nach der heutigen Auffassung (Prandtl[1]), zwischen der turbulenten Strömung und der Wand, eine Grenzschicht existiert, die in laminarer Bewegung sich befindet, und mit ihrer äußeren Fläche an der inneren Wandfläche der Röhre haftet.

Im Anschluß an diese Vorstellung über die Flüssigkeitsbewegung in Röhren, hat G. I. Taylor[2]) bemerkt (1916), daß in der laminaren Schicht der Wärmeübergang fast ausschließlich durch Leitung, in dem übrigen Teil durch Turbulenz bedingt ist. Daher soll man innerhalb der Grenzschicht die Gesetze der Wärmeleitung (Fourier), und innerhalb der turbulenten Bewegung die Gleichung von Reynolds anwenden. Setzt man also:

ε Dicke der laminaren Schicht;
T_1 Temperatur der innersten Schichtfläche, d. h. derjenigen Zylinderfläche, die die Grenze zwischen laminarer und turbulenter Bewegung darstellt;
u_1 Geschwindigkeit an derselben Stelle;
χ Wärmeleitfähigkeit der Flüssigkeit;
η Viskosität, die mit R durch die Beziehung

$$R = \eta \frac{u_1}{\varepsilon} \qquad (1)$$

zusammenhängt, dann soll man mit Taylor schreiben

$$H = \chi \frac{T_s - T_1}{\varepsilon}$$

für die Wärmeleitung in der Schicht;

$$H = \frac{R c_p (T_1 - T_m)}{u_m}$$

für den turbulenten Wärmeübergang.

Aus der Gleichsetzung beider Werte von H (im Beharrungszustand), bekommt man leicht, mit Berücksichtigung von (7),

$$H = \frac{R c_p (T_s - T_m)}{u_m} \cdot \frac{1}{1 + \frac{u_1}{u_m}\left(c_p \frac{\eta}{\chi} - 1\right)} \qquad \text{(III) (Taylor)}$$

[1]) Prandtl, Mathematikerkongreß zu Heidelberg, 1924.
[2]) Taylor, siehe 2).

Obwohl diese Gleichung durch die Erfahrung nicht in vollem Maß bestätigt zu sein scheint, stellt sie doch den ersten Schritt zur Verbesserung der einfachen Reynoldsschen Formel dar.

Deshalb lohnt es sich den parallelen Schritt mit der van Iterson-Lorenzschen Formel zu tun.

Das gelingt in ganz einfacher Weise nach den vorausgehenden Betrachtungen, da die Gleichung (5), (6) durch die Bemerkungen Taylors nicht berührt werden. Deren Einsetzung in (II) ergibt

$$h = \frac{\lambda \cdot \mu c_p}{8} \frac{1}{u_m} \cdot \frac{1}{1 + \frac{u_1}{u_m}\left(c_p \frac{\eta}{\chi} - 1\right)} \qquad \text{(IV)}$$

Diese Formel könnte man vervollständigen, wenn man imstande wäre, das Verhältnis u_1/u_m durch andere, der Erfahrung besser zugängliche Größen zu ersetzen. Es fehlen jetzt dazu — soviel mir bekannt — die nötigen Anhaltspunkte, besonders hinsichtlich der Grenzschicht. Übrigens kann man gegen Formel (IV) dieselben Einwände anführen, wie gegen diejenige von Taylor, aus welcher wir sie unmittelbar abgeleitet haben, so daß erst die Erfahrung uns künftighin belehren wird, ob und in welcher Richtung die Formel abzuändern sei.

Was aber auch ihr Schicksal sein wird, stellt sie einstweilen einen — mindestens theoretisch — wesentlichen Fortschritt gegenüber der einfacheren Formel (I), da in (IV) die Wärmeübergangszahl h mit anderen wichtigen Größen wie Wärmeleitfähigkeit und innerer Reibung in Zusammenhang gebracht ist.

Je höher, unter sonst gleichen Umständen, die Leitfähigkeit der Flüssigkeit, desto größer ist nach (IV) die Übergangszahl, was von vornherein zu erwarten war.

Zusammenfassung.

1. Die fast gleichzeitig von Prof. van Iterson und Prof. Lorenz aufgefundene Formel für die Wärmeübergangszahl wird auf die alte Reynoldssche Gleichung zurückgeführt.

2. Es wird eine neue Formel abgeleitet, in welcher die Abhängigkeit der Wärmeübergangszahl von der Wärmeleitzahl und der Viskosität auch zum Ausdruck kommt.

Palermo, Nov. 1927, Istituto di Fisica tecnica R. Scuola d'Ingegneria.

(Eingegangen 16. November 1927.)

Zur Strahlungsdämpfung in der Quantenmechanik.

Von Felix Bloch.

(Für ein gegebenes Atomsystem wird untersucht, wie sich das Quadrat des absoluten Betrages der Wellenfunktion im Lauf der Zeit ändert, wenn die Kopplung mit dem Strahlungsfeld in der von Dirac angegebenen Weise berücksichtigt wird. Es ergibt sich im allgemeinen eine Dämpfungszerstreuung von Wellenpaketen, die zu der schon ohne Dämpfung stattfindenden Zerstreuung hinzutritt. Wählt man jedoch im Spezialfall des harmonischen Oszillators für $t = 0$ diejenige Lösung der Wellengleichung, die das von Schrödinger angegebene Wellenpaket liefert, so bleibt dieses auch in der Folgezeit erhalten und vollführt die von der klassischen Theorie geforderte gedämpfte harmonische Schwingung.)

§ 1. Allgemeine Problemstellung: Wir untersuchen mit Dirac[1]) die Wechselwirkung eines Atoms A mit N beliebigen andern Systemen S_i ($i = 1, 2, \cdots N$). Vernachlässigt man zunächst die Wechselwirkungsenergie, so mögen die Eigenfunktionen des Atoms $u_A^k \cdot e^{\frac{2\pi i}{h} E_A^k t}$, die des i-ten Systems $u_i^{r_i} \cdot e^{\frac{2\pi i}{h} E_i^{r_i} t}$ lauten. Dabei seien die Quantenzustände des Atoms durch k, die von S_i durch r_i gekennzeichnet; beide nehmen wir vorläufig als diskret an. Um nun die Wellengleichung

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{2\pi i}{h}(H_0 + V)\psi = 0 \tag{1}$$

des Gesamtsystems, bestehend aus A und den N Teilsystemen S_i zusammengenommen zu befriedigen, kann man ihre allgemeine Lösung in der Form

$$\psi = \sum_{k, r_1 \cdots r_N} a_{k, r_1 \cdots r_N}^{(t)} \, u_A^k \, u_1^{r_1} \cdots u_N^{r_N} \cdot e^{\frac{2\pi i}{h}\left(E_A^k + \sum_{i=1}^{N} E_i^{r_i}\right) t} \tag{2}$$

ansetzen. Ist nun in (1) H_0 der aus der Energie des ungestörten Gesamtsystems, V der aus der störenden Wechselwirkungsenergie abgeleitete Operator, die beide die Zeit nicht explizit enthalten mögen, so ergeben sich für die Anregungsstärken $a_{k, r_1 \cdots r_N}^{(t)}$ die Differentialgleichungen

$$\dot{a}_{k, r_1 \cdots r_N}^{(t)} = -\frac{2\pi i}{h} \sum_{l, s_1 \cdots s_N} V_{k, r_1 \cdots r_N; \, l, s_1 \cdots s_N} \, e^{\frac{2\pi i}{h}\left[E_A^l - E_A^k + \sum_{i=1}^{N}\left(E_i^{s_i} - E_i^{r_i}\right)\right] t} \, a_{l, s_1 \cdots s_N}^{(t)} \tag{3}$$

Im Folgenden sollen sämtliche Funktionensysteme u_A^k, $u_i^{r_i}$ als orthogonal und normiert betrachtet werden. Dann ist

$$V_{k, r_1 \cdots r_N; \, l, s_1 \cdots s_N} = \int V u_A^k \, u_A^l \prod_{i=1}^{N} u_i^{r_i} \, u_i^{s_i} \, dq \, dx$$

das zur Störungsenergie V gehörige Matrixelement. Die Integration ist über den ganzen q-Raum des Gesamtsystems zu erstrecken; dq ist ein Volumelement des q-Raums aller S_i zusammengenommen, dx ein solches des Atom-Konfigurationenraumes.

Nach Born[2]) ist nun die reelle Größe $\psi\bar{\psi} dq\, dx$ ein Maß für die Wahrscheinlichkeit dafür, die Koordinaten des Atoms in dem durch das Volumelement dx und gleichzeitig die der Systeme S_i in dem durch dq gegebenen Bereich zu finden. Dagegen interessieren wir uns hier für die Wahrscheinlichkeit, die Atomkoordinaten im Bereich dx zu finden, unbekümmert darum, wo sich die S_i befinden. Diese erhält man offenbar durch Integration der Wahrscheinlichkeitsdichte $\psi\bar{\psi}$ über den ganzen Konfigurationenraum der Systeme S_i.

Wir fragen also nach der neuen, nur noch von den Atomkoordinaten und der Zeit abhängigen Wahrscheinlichkeitsdichte.

$$W(x, t) = \int \psi\bar{\psi}\, dq = \int \left| \sum_{k, r_1 \cdots r_N; \, l, s_1 \cdots s_N} a_{k, r_1 \cdots r_N}^{(t)} \, \bar{a}_{l, s_1 \cdots s_N}^{(t)} \, u_A^k \, u_A^l \prod_{i=1}^{N} u_i^{r_i} \, u_i^{s_i} \cdot e^{\frac{2\pi i}{h}\left[E_A^k - E_A^l + \sum_{i=1}^{N}\left(E_i^{r_i} - E_i^{s_i}\right)\right] t} \right| dq.$$

1) P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. **114**, 243, 1927. Vgl. auch L. Landau, Zeitschr. f. Phys. **45**, 430, 1927.
2) M. Born, Zeitschr. f. Phys. **37**, 863; **38**, 803, 1926.

Wegen der Orthogonalität und Normierung der Eigenfunktionen wird daraus

$$W(x,t) = \sum_{k,l}' N_{k,l}^{(t)} u_A^k u_A^l \cdot e^{\frac{2\pi i}{h}\left(E_A^k - E_A^l\right)t} \tag{4}$$

mit

$$N_{k,l}^{(t)} = N_{l,k}^{(t)} = \sum_{r_1 \cdots r_N}' a_{k,r_1 \cdots r_N}^{(t)} a_{l,r_1 \cdots r_N}^{(t)}. \tag{5}$$

Da uns vom ungestörten Fall her in (4) alles außer den Größen $N_{k,l}^{(0)}$ bekannt ist, besteht unsere Aufgabe darin, diese als Funktionen der Zeit zu bestimmen. Verschwindet die Störungsenergie, so sind die $N_{k,l}$ Konstante und $W(x,t)$ ist der aus der Wellenfunktion

$$\psi_A(x,t) = \sum_k' c_k \cdot u_A^k(x) \cdot e^{\frac{2\pi i}{h} E_A^k t}$$

des Atoms gebildete Ausdruck $\psi_A \psi_A^*$, wenn $N_{k,l} = c_k \bar{c}_l$ gesetzt ist.

§ 2. Kopplung mit dem Strahlungsfeld: Beim Problem der Strahlungsdämpfung sind die mit A in Wechselwirkung stehenden S_i Lichtquanten. Dadurch wird die allgemeine Aufgabe von § 1 zunächst durch folgende Zusatzforderungen eingeschränkt:

a) Die Systeme S_i sind alle gleichartig. Infolgedessen gehören im ungestörten Fall zu jedem von ihnen die gleichen Eigenfunktionen und Eigenwerte $u_i^{r_i} = u^r$ bzw. $E_i^{r_i} = E^r = h\nu_r$, für $r_i = r$ $(i = 1, 2 \ldots N)$. Die ersteren sind die Eigenfunktionen, die letzteren die mit h multiplizierten Frequenzen der dem Hohlraum eigenen elektromagnetischen Schwingungen. Zu diesen eigentlichen Zuständen der Lichtquanten fügt man zweckmäßig noch einen „nullten Zustand" hinzu, in dem sich ein Lichtquant befinden soll, solange es noch nicht in Erscheinung getreten ist; seine Energie und mithin auch seine Eigenfrequenz sind Null, die Zahl N_0 der in ihm befindlichen Lichtquanten unendlich groß.

b) Für die S_i gilt die Einstein-Bosesche Statistik. Infolgedessen[1]) müssen die Anregungsstärken $a_{k,r_1 r_2 \cdots r_N}$ in den Indizes r_i symmetrisch sein. Greifen wir unter ihnen diejenigen heraus, bei denen N_0 der Indizes r_i gleich Null, N_1 gleich 1 u. s. f. sind, so sind also alle diese $a_{k,r_1 \cdots r_N}$ gleich groß und zwar setzt Dirac

$$a_{k,r_1 \cdots r_N} = \left(\frac{N_0!\, N_1! \cdots}{N!}\right)^{1/2} a_{k,N_0 N_1 \cdots N_\infty}. \tag{6}$$

$a_{l,r_1 \cdots r_N} \bar{a}_{k,r_1 \cdots r_N}$ stellt nach Born die wahrscheinliche Anzahl derjenigen Gesamtsysteme dar, bei denen sich das Atom im k-ten und gleichzeitig das i-te Lichtquant im r_i-ten Zustand befinden $(i = 1, 2, \ldots N)$. Dann geht aus (6) hervor, daß $a_{k,N_0 N_1 \cdots} \bar{a}_{k,N_0 N_1 \cdots}$ die wahrscheinliche Anzahl derjenigen Gesamtsysteme bedeutet, bei denen sich das Atom im k-ten und gleichzeitig N_r der Lichtquanten im r-ten Zustand befinden $(r = 0, 1, 2, \ldots \infty)$. Es gilt dann, wie man sich leicht überzeugt, nach (5):

$$N_{k,l} = \sum_{r_1 \cdots r_N}' a_{k,r_1 \cdots r_N} \bar{a}_{l,r_1 \cdots r_N} = \sum_{N_0, N_1 \cdots N_\infty}' a_{k,N_0 N_1 \cdots N_\infty} \bar{a}_{l,N_0 N_1 \cdots N_\infty}. \tag{7}$$

Offenbar ist

$$N_{k,k} = N_k = \sum_{N_0, N_1 \cdots N_\infty}' a_{k,N_0 N_1 \cdots N_\infty} \bar{a}_{k,N_0 N_1 \cdots N_\infty} \tag{8}$$

die Zahl der Gesamtsysteme, bei denen sich das Atom im k-ten Zustand befindet.

c) Die Systeme S_i stehen zwar mit dem Atom, nicht aber unter sich in Wechselwirkung.

Dank den Forderungen a, b, c und dem Umstand, daß wir uns hier nur für Emissionsprozesse interessieren, d. h. nur für solche, bei denen ein Lichtquant vom „nullten" in einen oberen Zustand springt, vereinfachen sich die durch (3) gegebenen Differentialgleichungen stark. Die Matrixelemente der Störungsenergie entnimmt Dirac[1]) der klassischen Wechselwirkung der r-ten Hohlraumschwingung mit dem Atom

$$V_r = \frac{e}{c}(\mathfrak{A}_r, \dot{\mathfrak{x}})$$

e ist die Ladung, $\mathfrak{x}$ der Ortsvektor des im Atom beweglichen Massenpunktes; in der Folge wollen wir annehmen, daß er sich stets auf ein und derselben Geraden bewegt, also nur einen Freiheitsgrad

1) Vgl. P. A. M. Dirac, l. c.

hat und wollen seine Koordinate x nennen. Die Strahlung denken wir uns in lauter linear polarisierte Komponenten zerlegt, so daß das zur r-ten Eigenschwingung gehörige Vektorpotential die Form

$$\mathfrak{A}_r = \mathfrak{B}_r \cos 2\pi \nu_r \left(t - \frac{}{}\right) \qquad (9)$$

hat, wo $\mathfrak{B}_r$ einen nur noch von den Raumkoordinaten abhängigen Vektor darstellt; das skalare Potential möge stets Null sein. Die Gesamtenergie einer Hohlraumschwingung ist $N_r h \nu_r$, also ihre Energiedichte, da R das Volumen des Hohlraums darstellt, $N_r \frac{h \nu_r}{R}$. Vergleicht man diesen Wert mit demjenigen, der sich aus (9) nach der klassischen Elektrodynamik für die Energiedichte ergibt, so erhält man für den Betrag des Vektors $\mathfrak{B}_r$:

$$|\mathfrak{B}_r| = 2 N_r^{1/2} \left(\frac{hc^2}{2\pi R \nu_r}\right)^{1/2}.$$

Dann gelten für die durch (6) eingeführten neuen Anregungsstärken $a_{k, N_s N_t \ldots}$ die Differentialgleichungen

$$\dot{a}_{k, N_s N_t \ldots} = -\frac{2\pi i}{h} \sum_l \dot{x}_{kl} \sum_{r \neq 0} \left(\frac{\alpha}{\nu_r}\right)^{1/2} \cos \vartheta_r \left[N_r^{1/2} a_{l, N_s + 1 \cdots N_r - 1 \cdots} e^{\frac{2\pi i}{h}\left(E_A^l - E_A^k - E_r\right) t} + (N_r + 1)^{1/2} a_{l, N_s - 1 \cdots N_r + 1 \cdots} e^{\frac{2\pi i}{h}\left(E_A^l - E_A^k + E_r\right) t} \right] \qquad (10).$$

$\dot{x}_{kl}$, das Matrixelement der Geschwindigkeit geht aus x_{kl}, dem der Koordinate x hervor durch

$$\dot{x}_{kl} = \frac{2\pi i}{h} \left(E_A^k - E_A^l\right) x_{kl} \qquad (11)$$

und letzteres berechnet sich, aus den bekannten Eigenfunktionen des Atoms mittels der Formel

$$x_{kl} = \int x \, u_A^k(x) \, u_A^l(x) \, dx \qquad (12)$$

ϑ_r ist der Winkel zwischen dem in (9) eingeführten Vektor $\mathfrak{B}_r$ und der Geschwindigkeit und α steht für die Konstante $\alpha = \frac{e^2 h}{2\pi R}$[1]).

§ 3. Aufstellung der Differentialgleichungen für die N_{kl}: Wir berechnen zunächst den Wert der N_{kl} in erster Näherung, und zwar nach Ablauf einer Zeit t, über deren Größe wir die Annahmen machen:

a) t soll groß sein gegenüber den Schwingungszeiten der vom Atom emittierten Spektrallinien;

b) t soll so klein sein, daß die Zahl der Fälle, bei denen ein Atom unterdessen zwei oder mehr Lichtquanten emittiert hat, verschwindend klein ist gegenüber der Zahl derer, bei denen eines und diese wiederum klein ist gegen die Zahl der Fälle, bei denen kein Lichtquant emittiert wurde.

Wegen der Größe der mittleren Lebensdauer eines Zustandes sind diese beiden Annahmen miteinander verträglich.

Für $t = 0$, den Beginn des Strahlungsvorganges, befinden sich alle Lichtquanten im nullten Zustand, d. h. nur die Anregungsstärken

$$a^{(0)}_{k, N_s 000 \ldots} = c_k \qquad (13)$$

sind von Null verschieden.

Also ist nach (7)

$$N^{(0)}_{k,l} = c_k \bar{c}_l \qquad (14)$$

Zur Zeit t tragen wegen der Forderung b in (7) außer den $a^{(t)}_{k, N_s 00 \ldots}$ nur die $a^{(t)}_{k, N_s \overset{r}{0} \ldots 010 \ldots}$ Wesentliches bei und wir erhalten

$$N^{(t)}_{k,l} = a^{(t)}_{k, N_s 00 \ldots} \bar{a}^{(t)}_{l, N_s 00 \ldots} + \sum_{r \neq 0} a^{(t)}_{k, N_s \overset{r}{0} 0 \ldots 010 \ldots} \bar{a}^{(t)}_{l, N_s \overset{r}{0} 0 \ldots 010 \ldots} \qquad (15)$$

$a_{k, N_s \overset{r}{0} 0 \ldots 010 \ldots}$ ist dabei die Anregungsstärke derjenigen Eigenschwingung des Gesamtsystems, bei der sich das Atom im k-ten und ein Lichtquant im r-ten Zustand befinden, während alle übrigen

1) Vgl. P. A. M. Dirac, l. c. Dort wird in Formel (30) die Hamiltonsche Funktion angegeben, aus der sich nach § 2 die Formel (10) bestätigen läßt. Für das dort auftretende σ_r ist sein Wert $\frac{R \nu_r^2}{c^3}$ gesetzt.

Lichtquanten im nullten Zustand sind. Wir bestimmen zunächst ihren Wert in erster Näherung. Nach (10) und (13) ist

$$a^{(0)}_{k,\,N_0 00\ldots\,010\ldots}{}^{r} = \frac{4\pi^2}{h^2}\sum_l \left(E^k_A - E^l_A\right) x_{kl}\left(\frac{\alpha}{\nu_r}\right)^{1/2}\cos\vartheta_r\, c_l\, e^{\frac{2\pi i}{h}\left(E^l_A - E^k_A - E_r\right)t}$$

also

$$a^{(1)}_{k,\,N_0 00\ldots\,010\ldots}{}^{r} = -\frac{2\pi i}{h}\sum_l \left(E^k_A - E^l_A\right) x_{kl}\left(\frac{\alpha}{\nu_r}\right)^{1/2}\cos\vartheta_r\, c_l\, \frac{e^{\frac{2\pi i}{h}\left(E^l_A - E^k_A - E_r\right)t} - 1}{E^l_A - E^k_A - E_r} \tag{16}$$

Mit Hilfe der Ausdrücke (16) erhält man dann aus (10)

$$a^{(2)}_{k,\,N_0 00\ldots} = c_k - \frac{4\pi^2}{h^2}\alpha\sum_{l,m} x_{kl}\,x_{lm}\left(E^k_A - E^l_A\right)\left(E^l_A - E^m_A\right)c_m \Bigg| \sum_r \cos^2\vartheta_r \left[\frac{e^{\frac{2\pi i}{h}\left(E^m_A - E^k_A\right)t} - 1}{\left(E^m_A - E^k_A\right)\left(E^m_A - E^l_A - E_r\right)} - \frac{e^{\frac{2\pi i}{h}\left(E^l_A - E^k_A + E_r\right)t} - 1}{\left(E^l_A - E^k_A + E_r\right)\left(E^m_A - E^l_A - E_r\right)}\right]\Bigg| \tag{17}$$

und ferner

$$\sum_{r\neq o} a^{(1)}_{k,\,N_0 0\ldots\,010\ldots}{}^{r}\, a^{(1)}_{l,\,N_0 0\ldots\,010\ldots}{}^{r} = \frac{4\pi^2}{h^2}\alpha\sum_{m,n} x_{km}\,x_{ln}\left(E^k_A - E^m_A\right)\left(E^l_A - E^n_A\right)c_m\,c_n \Bigg| \sum_{r\neq o}\frac{\cos^2\vartheta_r}{\nu_r}\left[e^{\frac{2\pi i}{h}\left(E^m_A - E^k_A - E_r\right)t} - 1\right]\left[e^{-\frac{2\pi i}{h}\left(E^n_A - E^l_A - E_r\right)t} - 1\right]\Bigg| \tag{18}$$

$$\left(E^m_A - E^k_A - E_r\right)\left(E^n_A - E^l_A - E_r\right)$$

Die in (17) und (18) auftretenden Summen über den Index r werden im Falle eines unendlich großen Hohlraumes, wo die Zustände der Lichtquanten nicht mehr diskret sind, zu Integralen, die über den ganzen Wertebereich des Winkels ϑ_r von o bis π und über den der Frequenz ν_r von o bis ∞ zu erstrecken sind.

Wir integrieren zunächst über ϑ_r. Zu diesem Zweck denken wir uns um den Punkt $x = o$ die Einheitskugel geschlagen und ihren Nordpol in der einen der beiden Bewegungsrichtungen des Massenpunktes, von wo aus wir den Winkel ϑ_r zählen. Solange man die Strahlung noch nicht in linear polarisierte Komponenten aufgelöst hat, beschreibt das zu einer Eigenschwingung gehörige Vektorpotential eine Ellipse. Nun zerlegen wir die elliptische Schwingung in zwei zueinander senkrechte lineare, von denen die eine in der Äquatorebene stattfinden soll, also in (17) und (18) nichts beiträgt. Die Richtung des in (9) eingeführten, zur zweiten Komponente gehörigen Vektors $\mathfrak{B}_r$ ist dann eindeutig festgelegt, wenn wir noch fordern, daß er in derselben Hemisphäre liegen soll, wie die Normale zur Ellipsenebene, deren Richtung für jede Hohlraumeigenschwingung bestimmt ist und im Fall eines unendlich großen Hohlraums die Kugel gleichmäßig dicht erfüllt. Die Zahl der Eigenschwingungen, bei denen dieser Normalenvektor in den Raumwinkel $d\omega$ weist, ist nach bekannten Überlegungen

$$\frac{R\nu_r^2}{c^3}\,d\nu_r\,d\omega$$

und daraus folgt für die Zahl der linearen Schwingungskomponenten, bei denen der auf die Länge 1 normierte Vektor $\mathfrak{B}_r$ in die Kugelzone zwischen ϑ_r und $\vartheta_r + d\vartheta_r$ weist

$$z_r\,d\nu_r\,d\vartheta_r = \pm 2\pi\cos\vartheta_r\frac{R\nu_r^2}{c^3}\,\vartheta\,\nu_r\,d\vartheta_r,$$

wobei das obere Zeichen für die nördliche, das untere für die südliche Halbkugel gilt. Also tritt in (17) und (18) an Stelle des Zeichens $\sum_{r\neq 0}\frac{\cos^2\vartheta_r}{\nu_r}$ das Zeichen $\int_0^\infty f(\nu_r)\,d\nu_r$, wo

$$f(\nu_r) = \frac{1}{\nu_r}\int_0^\pi z_r\,d\vartheta_r = 2\cdot\frac{2\pi R\nu_r}{c^3}\int_0^{\pi/2}\cos^3\vartheta_r\,d\vartheta_r = \frac{8\pi}{3}\frac{R\nu_r}{c^3}. \tag{19}$$

Bei der Integration über v_r tragen nur die Glieder Wesentliches bei, deren Nenner irgendwo im Wertebereich von v_r eine quadratische Nullstelle hat, und auch diese nur in der Umgebung dieser Nullstelle. Dies sind in (17) die Glieder, bei denen die Bedingung

$$A)\quad E_A^k - E_A^l = E_A^m - E_A^l > 0$$

erfüllt ist. Denken wir uns die Eigenwerte E_A^i der Größe nach geordnet, so bedeutet dies einfach, daß in (17) nur über diejenigen Glieder zu summieren ist, bei denen $m = k > l$. In (18) sind es diejenigen Glieder, bei denen die Bedingung

$$B)\quad E_A^m - E_A^k = E_A^n - E_A^l > 0$$

erfüllt ist. Um anzudeuten, daß nur über sie zu summieren ist, schreiben wir in der Folge statt $\sum$: $\sum^B$. Demnach erhalten wir aus (17) unter Benutzung von (19)

$$a^{(t)}_{k,N_0 00\ldots} = c_k - \frac{4\pi^2}{h^2}\alpha\cdot\frac{8\pi R}{3h^2c^3}\sum_{l<k} x_{kl}x_{lk}\left(E_A^k - E_A^l\right)^3\cdot c_k\int \frac{1-e^{-\frac{2\pi i}{h}\left(E_A^k - E_A^l - E_r\right)t}}{E_A^k - E_A^l - E_r}^2\, dE_r.$$

Sei nun $\xi = \frac{2\pi t}{h}\left(E_A^k - E_A^l - E_r\right)$. Die Grenzen des Integrals sind dann an den Stellen $\xi = -\varepsilon\frac{2\pi t}{h}\left(E_A^k - E_A^l\right)$, und da für die Schwingungszeit der Spektrallinie mit der Frequenz

$$\nu_l^k = \frac{E_A^k - E_A^l}{h}$$

$\frac{1}{\nu_l^k} \ll t$ vorausgesetzt wurde, ist $\nu_l^k t$ so groß, daß für die Integrationsgrenzen ohne merklichen Fehler $\xi = \pm\infty$ gesetzt werden kann, obwohl $0 < \varepsilon \ll 1$. Also wird

$$a^{(t)}_{k,N_0 00\ldots} = c_k - \frac{4\pi^2}{h}\alpha\cdot\frac{8\pi R}{3c^3}\sum_{l<k} x_{kl}x_{lk}\left(\nu_l^k\right)^3\cdot c_k\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2\pi t}{h}\frac{1-\cos\xi}{\xi^2}\,d\xi = c_k - \beta t c_k\sum_{l<k} x_{kl}^2\left(\nu_l^k\right)^3, \tag{20}$$

wo

$$\beta = -\frac{4\pi^2}{h}\alpha\frac{8\pi R}{3c^3}\cdot\frac{2\pi}{h}\pi = -\frac{32\pi^4 e^2}{3hc^3} \tag{21}$$

gesetzt ist.

Analog ergibt sich aus (18)

$$\sum_{r\neq 0} a^{(t)}_{k,N_0 0\ldots 010\ldots}\, a^{(t)}_{l,N_0 0\ldots 010\ldots} = 2\beta t\sum_{m,n}{}^{B} x_{km}x_{ln}c_m c_n\left(\nu_k^m\right)^3 \tag{22}$$

und aus (15) wird, wenn wir darin die Werte (20) und (22) eintragen und die in βt quadratischen Glieder vernachlässigen

$$N_{kl}(t) = c_k c_l + \beta t\left\{2\sum_{m,n}{}^{B} x_{km}x_{ln}\left(\nu_k^m\right)^3 N_{mn}(0) - N_{kl}(0)\left[\sum_{m<k} x_{km}^2\left(\nu_m^k\right)^3 + \sum_{n<l} x_{ln}^2\left(\nu_n^l\right)^3\right]\right\}. \tag{23}$$

Wegen der oben gemachten Voraussetzung über die Größe von t kann man für (23) auch die Differentialgleichungen

$$\dot{N}_{kl} = \beta\left\{2\sum_{m,n}{}^{B} x_{km}x_{ln}\left(\nu_k^m\right)^3 N_{mn} - N_{kl}\left[\sum_{m<k} x_{km}^2\left(\nu_m^k\right)^3 + \sum_{n<l} x_{ln}^2\left(\nu_n^l\right)^3\right]\right\} \tag{24}$$

für die gesuchten N_{kl} setzen. Ihrer Herleitung nach beanspruchen sie zunächst nur Gültigkeit für den Beginn des Strahlungsvorganges. Da dieser Zeitmoment aber durch nichts vor den andern ausgezeichnet ist, dürfen wir ihre Gültigkeit auch zu jeder andern Zeit annehmen.

Zur Diskussion von (24) ist es zweckmäßig, folgende beiden Fälle getrennt zu betrachten:

1. $k = l$: Hier wird aus der Bedingung B

$$m = n > k$$

und folglich

$$\dot{N}_k = 2\beta\left\{\sum_{m>k} x_{km}^2\left(\nu_k^m\right)^3 N_m - N_k\sum_{m<k} x_{km}^2\left(\nu_m^k\right)^3\right\}. \tag{25}$$

Dieses Gesetz für die zeitliche Änderung der Besetzungszahlen N_k der einzelnen Zustände ist der einfache Ausdruck der Tatsache, daß die Größen

$$A_s^r = 2\beta x_{rs}^2\left(\nu_s^r\right)^3$$

die Einsteinschen Übergangswahrscheinlichkeiten angeben.

2. $k + l$: Abgesehen von dem speziellen Fall des harmonischen Oszillators, der in § 4 ausführlich behandelt wird, ist hier im allgemeinen die Bedingung B im diskreten Teil des Eigenwertspektrums unerfüllbar. Im kontinuierlichen Teil ist B natürlich immer erfüllbar; es sollen aber für $l = 0$ die Besetzungszahlen der Quantenzustände im kontinuierlichen Spektrum so klein angenommen werden, daß auch die N_{mn} stets sehr klein bleiben, sobald mindestens einer der beiden Indizes n und m sich auf den kontinuierlichen Teil bezieht. (Dies wird zum Beispiel der Fall sein, wenn man von einem Wellenpaket ausgeht, welches eine in erster Näherung periodische Bewegung ausführt.)

Dann verschwinden also die in $\sum_{m,n}^{B}$ zusammengefaßten Glieder und man erhält als Lösung von (24)

$$N_{kl}(t) = N_{kl}(o)\, e^{-\beta\left[\sum_{m} x^2_{km}\, v^4_{mk} + \sum_{n} x^2_{ln}\, v^4_{nl}\right] t}.$$

Daß hier die N_{kl} sämtlich exponentiell abnehmen, hat, worauf mich Prof. Heisenberg freundlichst aufmerksam machte, folgenden physikalischen Sinn:

Sind die N_{kl} $(k \neq l)$ hinreichend abgeklungen, so läßt sich nach (4) $W(x,t)$ in der Form

$$W(x,t) = \sum_{k} N_{k}(t)\, u^2_k$$

darstellen. Dies entspricht der Situation, daß man die Wahrscheinlichkeit, das Elektron in einem bestimmten Quantenzustand zu finden, zwar kennt, sein Ort aber über diese Aussage hinaus unbekannt ist. Während man zur Zeit $t = 0$ die Funktion $W(x,t)$ durch „Interferenz der Wahrscheinlichkeiten“ [1]) zu einem Wahrscheinlichkeitspaket aufbauen kann, geht diese Möglichkeit während des Dämpfungsvorganges in dem Maße verloren, wie die in (4) auftretenden gemischten, zeitlich rasch veränderlichen Glieder verschwinden. Die N_{kl} $(k \neq l)$ geben also ein Maß für die Interferenzfähigkeit der Schrödingerwellen.

Neben die Zerstreuung, die das Wellenpaket schon im ungedämpften Fall erfährt, tritt also noch eine von ihr unabhängige Dämpfungszerstreuung, die aber, wegen der Kleinheit der Dämpfungskonstanten im allgemeinen neben der ersteren stark zurücktreten wird.

§ 4. Die N_{kl} als Funktionen der Zeit für den Fall des Schrödingerschen Wellenpakets beim harmonischen Oszillator: Setzt man

$$x = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{h}{m\nu}\right)^{1/2} x',$$

wo m die Masse, ν die klassische Frequenz des Oszillators bedeuten, so lauten seine Eigenfunktionen und Eigenwerte [2])

$$u^k_{A} = \frac{1}{\sqrt{2^k \cdot k!}\,\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{x'^2}{2}} H_k(x')$$

bzw.

$$E^k_{A} = \left(k + \frac{1}{2}\right) h\nu.$$

Daraus ergeben sich nach (12) für die Matrixelemente von x die bekannten Werte

$$x_{kl} = \begin{cases} \left(\dfrac{h}{8\pi^2 m\nu}\right)^{1/2} \sqrt{k+1} & \text{für } l = k+1 \\ \left(\dfrac{h}{8\pi^2 m\nu}\right)^{1/2} \sqrt{k} & \text{für } l = k, \end{cases}$$

während die übrigen Elemente verschwinden. Dann wird aus (24)

$$\dot{N}_{kl} = \frac{\gamma}{2}\left[2\sqrt{k+1}\sqrt{l+1}\, N_{k+1,\,l+1} - (k+l) N_{kl}\right] \tag{26}$$

und aus (25)

$$\dot{N}_{k} = \gamma\left[(k+1) N_{k+1} - k N_k\right] \tag{27}$$

mit

$$\gamma = 2\beta\nu^3 \frac{h}{8\pi^2 m\nu} = \frac{8\pi^2 e^2 \nu^2}{3 m c^3}$$

1) Vgl. P. Jordan, Zeitschr. f. Phys. **40**, 809, 1927.
2) Vgl. E. Schrödinger, Ann. d. Phys. **79**, 489, 1926.

Wir integrieren zunächst (27). Herr Beck[1]) hat die Lösung dieses Gleichungssystems für den Fall angegeben, daß für $t = 0$ alle Oszillatoren sich im n-ten Zustand befinden und gezeigt, daß dann die Gesamtenergie

$$E = \sum_k N_k E_k^A$$

gemäß einem Exponentialgesetz abnimmt.

Wir wollen hier auf eine einfache Weise die Lösungen von (27) für jede beliebige Anfangsverteilung finden und bei der Gelegenheit das exponentielle Abklingungsgesetz der Energie bestätigen.

Zu diesem Zweck führen wir eine erzeugende Funktion der Größen N_k ein

$$F(\lambda, t) = \sum_{k=0}^{\infty} N_k(t) \cdot \lambda^k \tag{28}$$

Ist sie einmal bestimmt, so sind es auch die N_k als Koeffizienten der Taylorentwicklung nach Potenzen des Parameters λ. Nun ist nach (27)

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \gamma \sum_k (k+1) N_{k+1} - k N_k$$

und

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = \sum_k N_k \cdot k \cdot \lambda^{k-1} \tag{29}$$

also

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \gamma (1 - \lambda) \frac{\partial F}{\partial \lambda}. \tag{30}$$

Durch diese partielle Differentialgleichung ist $F(\lambda, t)$ zu bestimmen. Sie ist vollkommen gleichwertig mit dem totalen Gleichungssystem (27). (30) wird befriedigt durch jede Funktion vom Argument $(1 - \lambda) e^{-\gamma t}$. Ist die Anfangsverteilung der Oszillatoren, also die Größe

$$F(\lambda, o) = \sum_k N_k(o) \lambda^k = f(\lambda) \tag{31}$$

vorgegeben, so erhalten wir als Lösung von (30)

$$F(\lambda, t) = f[1 - (1 - \lambda) e^{-\gamma t}] = \sum_k N_k \cdot \lambda^k. \tag{32}$$

Die Gesamtzahl der Oszillatoren,

$$Z = \sum_k N_k = F(1, t) = f(1)$$

ist, wie notwendig, zeitlich konstant. Für die Energie finden wir

$$E = \sum_k N_k E_A^k = E_0 + h\nu \sum_k k N_k.$$

Nun ist nach (29) und (32)

$$\sum_k k N_k = \left(\frac{\partial F}{\partial \lambda}\right)_{\lambda=1} = f'(1) \cdot e^{-\gamma t}$$

und mithin

$$E = E_0 + E_1 \cdot e^{-\gamma t},$$

wo $E_1 = h\nu \cdot f'(1)$ eine Konstante darstellt. Also klingt der nicht zur Nullpunktsenergie $E_0 = Z \cdot \frac{h\nu}{2}$ gehörige Teil exponentiell ab.

Um das Schrödingersche Wellenpaket[2]) zu erhalten, hat man in (31)

$$N_k(o) = \frac{A^{2k}}{2^k \cdot k!}$$

zu setzen, wo A irgendeine große reelle Zahl ist. Dann wird

$$f(\lambda) = \sum_k \frac{1}{k!} \left(\frac{A^2 \lambda}{2}\right)^k = e^{\frac{A^2 \lambda}{2}}$$

1) G. Beck, Zeitschr. f. Phys. **42**, 86, 1927.
2) E. Schrödinger, Naturw. **14**, 664, 1926.

und nach (32)

$$F(\lambda,t) = e^{\frac{A^2}{2}(1-(1-\lambda)e^{-\gamma t})} = e^{\frac{A^2}{2}(1-e^{-\gamma t})} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \left(\frac{A^2 e^{-\gamma t}}{2}\right)^k.$$

Also

$$N_k(t) = \frac{1}{k!} e^{\frac{A^2}{2}(1-e^{-\gamma t})} \left(\frac{A^2 e^{-\gamma t}}{2}\right)^k. \tag{33}$$

Wir behaupten nun, daß die gesuchte Wahrscheinlichkeitsdichte (4) gegeben ist durch

$$W(x,t) = \sum_{k,l=0}^{\infty} N_{kl}(t)\, u_A^k(x)\, u_A^l(x)\, e^{\frac{2\pi i}{h}(E_A^k - E_A^l)t} = \Psi_A \bar{\Psi}_A, \tag{34}$$

wo

$$\Psi_A = \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{N_k(t)}\, u_A^k(x)\, e^{\frac{2\pi i}{h} E_A^k t} \tag{35}$$

gesetzt ist. Dies bedeutet, daß sich unser Wellenpaket so verhält, als ob es eine „Wellenfunktion des gedämpften Oszillators", nämlich die Größe (35), gebe, aus der es in üblicher Weise hergeleitet ist. Im allgemeinen ist es bei gekoppelten Systemen natürlich sinnlos, von der „Wellenfunktion des Atoms allein" zu reden. Nur die Wellenfunktion des Gesamtsystems und die aus ihr abgeleitete Wahrscheinlichkeitsdichte (4) behalten ihren Sinn bei, und eine Darstellung von $W(x,t)$ in der Form (34) gibt es im allgemeinen nicht.

Zum Beweis unserer Behauptung haben wir nur zu zeigen, daß

$$N_{kl}(t) = \sqrt{N_k(t) N_l(t)} \tag{36}$$

tatsächlich eine Lösung von (26) ist. Daß es dann auch die richtige, den Anfangsbedingungen genügende Lösung ist, folgt daraus, daß (36) zur Zeit $t = 0$ nach (14) erfüllt ist. Durch Einsetzen von (36) in (26) folgt

$$\dot{N}_k N_l + N_k \dot{N}_l = \gamma\left[2\sqrt{k+1}\sqrt{l+1}\sqrt{N_{k+1}N_{l+1}} N_k N_l - (k+l) N_k N_l\right]$$

und diese Relation besteht nach (33) zu Recht, da

$$\sqrt{k+1}\sqrt{\frac{N_{k+1}}{N_k}} = \sqrt{l+1}\sqrt{\frac{N_{l+1}}{N_l}}.$$

Setzen wir nun in (35) die Werte

$$u_A^k = \frac{1}{\sqrt{2^k \cdot k!}\sqrt{\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} H_k(y) \text{ und } E_A^k = \left(k + \frac{1}{2}\right) h\nu$$

und die Werte (33) für die N_k ein, so wird

$$\Psi_A = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{A^2}{4}(1-e^{-\gamma t}) + \pi i \nu t - \frac{y^2}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{A}{2} e^{-\frac{\gamma}{2}t + 2\pi i \nu t}\right)^k \frac{H_k(y)}{k!}. \tag{37}$$

Unter Berücksichtigung der charakteristischen Summenrelation der Hermiteschen Polynome

$$\sum_{k=0}^{\infty} t^k \frac{H_k(y)}{k!} = e^{-t^2 + 2ty}$$

wird aus (37)

$$\Psi_A = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{A^2}{4}(1-e^{-\gamma t}) + \pi i \nu t - \frac{y^2}{2} + A \cdot e^{-\frac{\gamma}{2}t + 2\pi i \nu t} y + \frac{A^2}{4} e^{-\gamma t + 4\pi i \nu t}}$$

und schließlich nach (34)

$$W(x,t) = \Psi_A \bar{\Psi}_A = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{A^2}{2} - \left[2\pi \left(\frac{m\nu}{h}\right)^{1/2} x - A \cdot e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos 2\pi \nu t\right]^2}. \tag{38}$$

Der durch diese Funktion dargestellte Gaußsche Fehlerbuckel vollführt also dieselbe gedämpfte harmonische Schwingung, wie ein klassischer Oszillator im Strahlungsfeld.

Daß sich das Wellenpaket wie beim ungedämpften Oszillator im Lauf der Zeit nicht zerstreut und seine Form beibehält, kann man sich im Anschluß an die Überlegungen von Kennard[1]) durch das Verhalten der klassischen Oszillatoren veranschaulichen, von denen ein Schwarm im Lauf der Zeit ebenfalls nicht zerstreut wird, da die Dämpfung weder von der Anfangslage noch von der Anfangsgeschwindigkeit abhängt.

Herrn Prof. Heisenberg bin ich für die zahlreichen Unterredungen während des Entstehens dieser Arbeit zu größtem Dank verpflichtet.

Leipzig, Theoretisch-Physikalisches Institut der Universität, 14. Dezember 1927.

1) E. H. Kennard, Zeitschr. f. Phys. **44**, 326, 1927.

(Eingegangen 22. Dezember 1927.)

VORTRÄGE UND DISKUSSIONEN DES IV. DEUTSCHEN PHYSIKERTAGES IN KISSINGEN VOM 18.—24. SEPTEMBER 1927.

Felix Jentzsch (Berlin), Die Rastermethode. Ein Verfahren zur Demonstration und Messung der sphärischen Aberration.

§ 1. Beschreibung des Grundversuchs.

Die Grundlage der Rastermethode ist folgende Erscheinung, die sich vorzüglich zur objektiven Demonstration auch vor sehr großem Hörerkreis eignet[1]). Man rückt den Kondensor von der Bogenlampe eines Projektionsapparates soweit ab, bis ein reelles Bild des Kraters in einiger Entfernung vom Kondensor entsteht. Auf der Projektionswand zeigt sich dann ein nicht ganz gleichmäßig heller, meist farbig umsäumter Lichtkreis. Hält man nun ein grobes Gitter, z. B. aus etwa 5 Drähten pro Zentimeter, zwischen das Kraterbild und die Wand, so wird man im allgemeinen Schattenstreifen auf der Projektionsfläche sehen, die den Gitterstrichen geometrisch ähnlich, also gradlinig und äquidistant sind. Rückt man aber mit dem Gitter näher an das Kraterbild heran, so wird zunächst die Anzahl der Schattenstreifen geringer, da der Kreis, in dem das Lichtbündel die Gitterebene trifft, immer kleiner wird. Außerdem aber wird Breite und gegenseitiger Abstand der Streifen immer größer, zumal bei den mittleren Streifen in der Nähe der optischen Achse (Fig. 1 u. 2). Fixiert man das Gitter so, daß die Achse gerade die Mitte eines lichtdurchlässigen Teiles des Gitters durchstößt, so werden in der Mitte des Schattenbildes die Streifen auseinander gedrängt, bis bei weiterer Bewegung des Gitters auf die Lichtquelle hin sich in der Mitte eine annähernd kreisförmig erleuchtete Stelle bildet. Bei weiterer Bewegung des Gitters zeigen sich dort zwei symmetrisch liegende geschlossene Kurvenzweige (Fig. 3), aus denen weiterhin ständig neue geschlossene Kurven herausquellen, die die ursprünglich ungeschlossenen Kurven immer mehr beiseite drängen. Die „Quellpunkte" wandern dabei nach außen (Fig. 4 u. 5), in der Mitte werden die Schattenstreifen wieder dichter und nähern sich mehr und mehr in ihrer Form wieder äquidistanten Geraden, bis zuletzt das Schattenbild wieder so wie bei Beginn der Gitterbewegung aussieht. Im Verlauf dieser Verschiebung ist man inzwischen mit dem Gitter über das Kraterbild hinaus in den Raum zwischen Kondensor und Bild gelangt.

Die Erscheinung der Quellpunkte zeigt sich nur, solange man mit dem Raster bzw. Gitter die Kaustik durchwandert, die in der Gegend des Kraterbildes in der Luft schwebt. Besonders das erste Auftreten geschlossener Kurven ist äußerst labil und bei Verwendung einer chromatisch nicht korrigierten Linse bietet sich im weißen Licht der Bogenlampe ein sehr lebhaftes Farbenspiel.

Zur praktischen Vorführung dieser Schattenbilder ist zu beachten, daß die Bilder um so schärfer werden, je kleiner die Lichtquelle ist, — aber natürlich auch dementsprechend lichtschwächer. Glühlampen kann man daher nicht verwenden. Auch bei Bogenlampen wird es sich oft empfehlen, an die Stelle des direkten Kraterbildes eine Blende zu setzen und erst von dieser als Lichtquelle auszugehen. Durch Filter oder eine spektrale Vorzerlegung kann man leicht auch objektiv demonstrieren, wie stark die Lage und Form der Quellpunkte und der sie umschließenden Kurven von der Farbe abhängt.

1) In dieser Form seit W.-S. 1925/26 von mir in der großen Vorlesung über Experimentalphysik im Berliner Institut benutzt.

Fig. 1.
Anfangsstellung des Rasters.

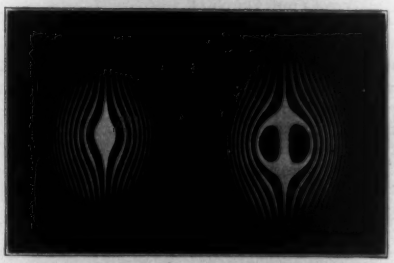


Fig. 2.
Raster außerhalb der Kaustik.

Fig. 3.
Raster außerhalb der Kaustik.

Fig. 4.
Raster innerhalb der Kaustik.

Fig. 5.
Raster innerhalb der Kaustik.

Fig. 7.
Schattenbild eines einzelnen Drahtes.

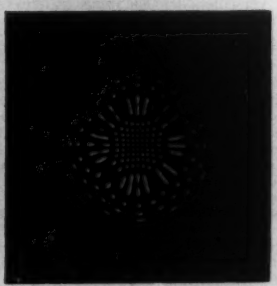


Fig. 8.
Schattenbild eines Kreuzrasters.

Zur subjektiven Beobachtung nimmt man eine schwächere Lichtquelle mit kleiner Blende, hält das Gitter ganz dicht vor das Auge und bewegt eine Sammellinse mit dem freien Arm zwischen Lichtquelle und Gitter. Man sieht dann im wesentlichen die gleichen Erscheinungen wie oben beschrieben. Denselben Anblick kann man auf scheinbar andere Weise erzielen, wenn man das Gitter auf eine erleuchtete Milchglasscheibe legt und es durch eine Linse bei passenden Abstandsverhältnissen betrachtet[1]). Offenbar liegt hier nur eine Vertauschung der Blenden vor.

Die Figuren 1—5, Tafel I zeigen einige typische Formen der Erscheinung. Sie sind im monochromatischen Licht (grüne Quecksilberlinie) und mit einer Blende von etwa 1 mm Durchmesser hergestellt. Als Objektiv diente eine einfache Meniskuslinse, als Gitter Raster, wie sie in der Reproduktionstechnik zur Herstellung von Autotypien verwendet werden[2]) mit verschiedenen Strichzahlen zwischen etwa 40 und 50 Strichen pro Zentimeter. Während zur objektiven Projektion Drahtgitter recht geeignet sind, stören auf Photogrammen, die zur Ausmessung bestimmt sind, die Reflexe an den Drähten. Die Raster sind Glasplatten von 2—4 mm Dicke, auf denen lichtdurchlässige Streifen mit ungefähr gleich breiten undurchlässigen abwechseln. Die Grenze zwischen ihnen wird durch einen feinen Diamantstrich gebildet, wodurch ein völlig scharfer Abfall der Schwärzung erreicht ist[3]).

§ 2. Elementare Theorie.

Die Erklärung dieser Erscheinungen ist ganz elementar. Würden alle von der punktförmig vorausgesetzten Lichtquelle herkommenden Strahlen tatsächlich durch einen einzigen Bildpunkt gehen, so entstünde das Schattenbild des Gitters als einfache Zentralprojektion. In Wirklichkeit tritt aber an Stelle des Bildpunktes eine Kaustik. Zu den verschiedenen Projektionsrichtungen gehören also verschiedene Projektionszentren. Die einzelnen Punkte eines Gitterstriches, die ja von Strahlen verschiedener Richtung durchsetzt werden, werden von verschiedenen Punkten aus projiziert und müssen demnach (mit scheinbarer Ausnahme des durch die Achse gehenden Gitterstriches) gekrümmte Schattenlinien ergeben. Die Form der Kurven hängt davon ab, nach welchem Gesetz die Projektionszentren mit dem Winkel wandern, d. h. von der gewöhnlichen sphärischen Aberration auf der Achse, ausgedrückt als Funktion des Bildwinkels. Betrachtung der Kurven muß also eine qualitative Beurteilung des Korrektionszustandes, ihre Ausmessung eine quantitative Methode ergeben.

Zur analytischen Darstellung (Fig. 6) legen wir ein rechtwinkliges Koordinatensystem zugrunde mit dem Nullpunkt in der Spitze der

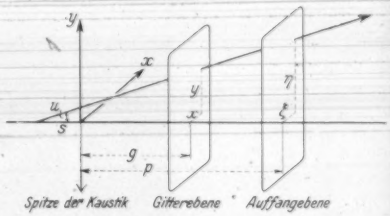


Fig. 6.

Kaustik, die wir im übrigen rotationssymmetrisch zur z-Achse voraussetzen. Es bezeichne g den Abstand der **G**itterebene, p den der Auffangebene (**P**latte) von der Spitze der Kaustik, wobei beide Ebenen senkrecht zur z-Achse angenommen werden. Einer der projizierenden Strahlen schneide die Achse im Abstand s von der Spitze der Kaustik und zwar unter dem Winkel u. Seien weiter x und y die Koordinaten eines Punktes der Gitterebene und ξ und η die in der Auffangebene, so wird augenscheinlich gelten

$$\frac{\xi}{x} = \frac{\eta}{y} = \frac{p-s}{g-s} \qquad (1)$$

$$\operatorname{tg} u = \frac{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}{p-s} \qquad (2)$$

wo s die Aberration bedeutet. Wir denken uns s als Potenzreihe von $\operatorname{tg} u$ dargestellt, wobei wegen der Rotationssymmetrie nur gerade Potenzen auftreten. Im einfachsten Falle[1]) wird also:

$$s = A \cdot \operatorname{tg}^2 u. \qquad (3)$$

Elimination von s und $\operatorname{tg} u$ aus den obigen drei

1) Auf diese Art der Beobachtung wurde ich bei einer Mahlzeit aufmerksam, bei der einfache glatt geschliffene durchsichtige Weingläser verwendet wurden. Waren diese halbgefüllt, wirkten sie als Linse und die Fäden des leinenen Tischtuches als Gitter. Man sieht dann die Fäden des Tuches gekrümmt und bei passender Haltung des Auges teilweise auch als geschlossene Kurven.

2) Bezugsquelle: Firma J. C. Haas in Frankfurt a. M.

3) Weiteres über die Technik derartiger Aufnahmen findet sich in der Berliner Dissertation von Günther Schulz.

1) Vgl. Felix Jentzsch, Beziehung zwischen geometrischer Optik und Wellenoptik. Handb. d. Phys. von Geiger und Scheel **18**, 294—295. Wie dort näher ausgeführt, wird für obiges spezielles Beispiel der Meridianschnitt der Kaustik eine semikubische Parabel. Unter den Wellenflächen befindet sich ein Rotationsparaboloid.

Gleichungen liefert sofort die Darstellung der Schattenkurven in rechtwinkligen Koordinaten:

$$A(\xi - x)^3(\xi^2 + \eta^2) = (g\xi - px)(p - g)^2 \cdot \xi^2 \quad (4)$$

oder dieselbe Gleichung mit y und η statt x und ξ. Ist unser Gitter gradlinig mit äquidistanten Streifen, wird $x = N \cdot \delta$, wobei δ die Gitterkonstante ist und für N der Reihe nach die ganzen Zahlen $\ldots -2, -1, 0, +1, +2, \ldots$ einzusetzen sind. Die Form der Schattenkurven ist also eine Quintik, die im Ursprung einen doppelt zählenden Punkt hat, $\xi = N\delta$ ist eine Asymptote. Für ein ideales Objektiv [$A = 0$] ergeben sich die Formeln der gewöhnlichen Zentralprojektion

$$\xi = \frac{p}{g} \cdot x. \quad (5)$$

Für $x = 0$, d. h. für den durch die Achse gehenden Gitterstreifen zerfällt Gleichung (4) in eine Gerade $\xi = 0$ und in

$$\xi^2 + \eta^2 = \frac{g}{A}(p - g)^2, \quad (6)$$

d. h. einen Kreis, so daß also der Schatten einer durch die optische Achse gehenden Geraden aus einer Geraden und einem Kreise bestehen kann, der reell ist, wenn g und A das gleiche Vorzeichen haben.

Eine Bestätigung dieses immerhin überraschenden Ergebnisses gibt Fig. 7, Tafel I, die als Schatten eines einzelnen, genau durch die Achse gehenden Drahtes eine Gerade und den sog. „Nullkreis" zeigt. Auch diese Erscheinung läßt sich projizieren, erfordert aber natürlich gute Justierung.

Eine fast noch bessere Übersicht gibt Fig. 8, Tafel I, das Schattenbild eines Kreuzrasters. Der Kreis wird nur von einem einzigen Element der Gitterebene erzeugt. Auch sieht man in diesem Bild deutlich, wie sich bei allmählicher Abblendung das Objektiv immer mehr dem Idealzustand der Aberrationsfreiheit nähert. Die in der Mitte gelegenen Schattenstellen sind in ihrer Anordnung fast geometrisch ähnlich den dort liegenden Rasteröffnungen.

Bei der subjektiven Betrachtung der Schattenkurve kommt es nur auf die Winkelwerte an, unter denen sie erscheinen, woraus sich eine etwas übersichtlichere Schreibart der Kurvengleichung gewinnen läßt. Statt des Abstandes der Auffangebene p ist in diesem Falle der Abstand der Ebene einzuführen, auf die man das wahrgenommene Kurvenbild subjektiv projiziert. Wir setzen also

$$\xi' = \frac{\xi}{p} \text{ und } \eta' = \frac{\eta}{p}$$

und erhalten zunächst

$$A\left(\xi' - \frac{x}{p}\right)^3(\xi'^2 + \eta'^2) = (g\xi' - x)\left(1 - \frac{g}{p}\right)^2 \cdot \xi'^2. \quad (6)$$

Für Beobachtung mit einem normalen (emmetropischen) Auge mit entspannter Akkommodation wird $p = \infty$, so daß wir schreiben können

$$\left(\xi'^2 + \eta'^2 - \frac{g}{A}\right) \cdot \xi' = -\frac{x}{A}. \quad (7)$$

Wie man sieht, zerfallen die Kurven für einen verschwindenden Wert der rechten Seite in Kreis und Gerade und werden sich auch für kleine Werte der Konstante x/A, d. h. kleine N, eng an jenen Kreis und jene Gerade anschließen, also immer noch aus einem geschlossenen Zweige innerhalb des Kreises und einem ins Unendliche gehenden Zweige mit zwei Wendepunkten außerhalb bestehen.

Verwenden wir nicht geradlinige, sondern Kreisgitter, wobei Punkte der Gitterebene durch r und φ, solche der Auffangebene durch R und φ bezeichnet werden mögen, so erhält man statt Gleichung (4)

$$A(R - r)^3 = (gR - pr)(p - g)^2, \quad (8)$$

was sich leicht auf die Normalform für kubische Gleichungen mit $R - r$ als Unbekannter bringen läßt.

$$\frac{A}{(p - g)^2} \cdot (R - r)^3 - g(R - r) + (p - g) \cdot r = 0. \quad (8a)$$

Man sieht dann ohne weiteres, daß im allgemeinen jedem Punkte der Rasterebene drei Punkte in der Auffangebene entsprechen. Sie sind aber nur solange reell als

$$r^2 < \frac{4g^3}{27A}$$

ist. Für ein zentriertes Kreisgitter würden also als Schattenbilder nur Kreise zu erwarten sein, je nach der Lage gegenüber der Kaustik 1 oder 3. Ihre Abstände voneinander wären nicht gleich, so daß man aus ihrer Ausmessung ebenfalls den Verlauf der Aberration ermitteln könnte. Doch wäre es nicht leicht die Zuordnung eines Gitterkreises zu seinen Schattenkreisen zu erkennen.

Bei höheren Aberrationen, wenn ein einziges Glied nicht mehr genügt, sondern etwa

$$s = A \operatorname{tg}^2 u + B \cdot \operatorname{tg}^4 u$$

zu schreiben ist, erhält man als Gleichung der Schattenkurven

$$A(p - g)^2 \cdot (\xi - x)^3(\xi^2 + \eta^2) \cdot \xi^2 + B(\xi - x)^5(\xi^2 + \eta^2)^2 = (g\xi - px)(p - g)^4 \cdot \xi^4, \quad (9)$$

d. h. Kurven 9. Grades. $x = 0$ liefert Zerfall in einem fünffach zählenden Punkt und zwei Kreise.

Die Umformung für subjektive Beobachtung bzw. unendlich weit entfernte Auffangebene ergibt

$$[A(\xi'^2+\eta'^2)+B(\xi'^2+\eta'^2)^2-g]\cdot\xi'=-x. \quad (10)$$

Nimmt man in der Potenzreihe noch ein weiteres Glied hinzu, so entsteht eine Kurvenschar vom 13. Grade, die für $x=0$ in einen siebenfach zählenden Punkt und drei Kreise zerfällt.

Schon bei der einfachen Aberration mit nur einem Gliede war der „Nullkreis" nicht immer reell, sondern nur bei bestimmter Lage des Gitters innerhalb der Kaustik. Bei den zuletzt besprochenen Fällen treten noch gewisse Größen- und Vorzeichenbedingungen dazu, die zwischen den Koeffizienten der Aberration bestehen müssen, damit die Schattenkreise nicht imaginär werden. Doch würde die Erörterung dieser Verhältnisse hier zu weit führen.

§ 3. Praktische Anwendung.

Zur Auswertung nimmt man am besten Photogramme, die die beiden Quellpunkte deutlich zeigen und benutzt dann, indem man sich auf die xz-Ebene beschränkt, die unmittelbar aus Fig. 6 ablesbaren Beziehungen

$$\operatorname{tg} u=\frac{\xi-x}{p-g} \quad (11)$$

$$\operatorname{tg} u=\frac{x}{g-s} \quad (12)$$

also

$$g-s=\frac{x(p-g)}{\xi-x}=\frac{N\delta(p-g)}{\xi-N\delta} \quad (13)$$

Der Abstand $p-g$ der beiden Ebenen ist mit sehr großer Genauigkeit leicht festzustellen. Die ξ-Achse ist im Schattenbild durch die beiden Quellpunkte genügend genau definiert. Auf ihr mißt man die einzelnen ξ-Werte mit dem Komparator, nachdem man sich über die Zuordnung von Rasterstrich und Schattenlinie klar geworden ist. Aus Gleichung (11) findet man sofort den Bildwinkel u, sowie nach Gleichung (12) oder (13) die zugehörigen Schnittweiten $g-s$ in bezug auf die Gitterebene. Der Abstand g der Kaustikspitze von der Gitterebene ließe sich direkt messen, doch ergibt er sich mit großer Genauigkeit als Grenzwert der Aberrationskurve von selbst. Es sei hervorgehoben, daß das so erhaltene Resultat natürlich die wirkliche Aberrationskurve liefert und von der Beschränkung einer abgebrochenen Potenzreihendarstellung frei ist.

Beispiele für derartige Auswertungen sind in der von mir veranlaßten Dissertation von Günther Schulz[1]) gegeben. Herr Schulz hat noch eine Verfeinerung der Messungen erzielt, indem er zur Auswertung die auftretenden Beugungserscheinungen heranzog, die zum Teil recht interessante Einzelbilder ergeben. Als Beispiel sei auch an dieser Stelle die der Arbeit von G. Schulz entnommene Fig. 9, Tafel II gegeben, eine Vergrößerung des Schattenbildes, das von einem Objektiv mit sehr starker Aberration herrührt. Die auffallende Gabelung der Schattenstreifen ist wohl eine Moiré-Erscheinung, die sich aus der endlichen Größe der Lichtquelle ergibt. Ihre Beschränkung auf ein gewisses Gebiet folgt aus der Stellung der Gitterebene innerhalb der Kaustik, wodurch die Mittelpartien von konvergenten, die Randpartien von divergenten Strahlen getroffen wurden. Auch über die in unserer Figur 5 bereits in der Mitte angedeutet enthaltenen elliptischen „Gebiete gleicher Deutlichkeit" sehe man die Arbeit von G. Schulz.

1) Günther Schulz, Über die Prüfung optischer Systeme mit Rastern. Ann. d. Phys. **85**, 1927.

Zusammenfassung.

Die vorstehend beschriebene Rastermethode zur Prüfung optischer Systeme ist in ihrer Ausgestaltung wohl als neuartig anzusehen, wenn es auch viel Ähnliches gibt. Man kann sie z. B. auffassen als eine „Multiplikation der Messerschneidenmethode". Bekanntlich liefert bei diesem von Foucault stammenden Verfahren jede Stellung der Schneide eine andere Kurve, wobei man die meßbare Verschiebung der Schneide längs und senkrecht zur optischen Achse vermutlich schon mehrfach zur Berechnung der Aberrationsgrößen selbst benutzt hat. Veröffentlicht ist allerdings über eine derartige quantitative Ausnutzung der Messerschneidenmethode anscheinend nichts. Hier bei der Rastermethode werden die bei Foucault nacheinander auftretenden Stellungen des Messers durch die einzelnen Gitterstreifen gleichzeitig dargestellt.

Auch mit dem Töplerschen Schlierenverfahren ist die Rastermethode verwandt. Jeden einzelnen Gitterstreifen kann man als eine Töplersche Blende auffassen, durch die bekanntlich Stellen der Linse, in denen der Brechungsindex von seiner Umgebung mehr oder weniger abweicht, sichtbar werden. Auch bei unserer Rastermethode ist eine solche Prüfung, besonders subjektiv, leicht zu ermöglichen. Fig. 10, Tafel II zeigt ein Photogramm, bei dem absichtlich so eingestellt wurde, daß die Schliere in einen Quellpunkt zu liegen kam. Entsprechendes gilt für Schleiffehler, wovon Fig. 11, Tafel II ein Beispiel gibt.

Die scheinbar sehr ähnlichen Methoden von Roncchi und Lenouvel verwenden so enge Gitter, daß von geometrischen Schatten keine Rede sein kann, sondern nur Interferenz- und Beugungserscheinungen (im engeren Sinne) auf-

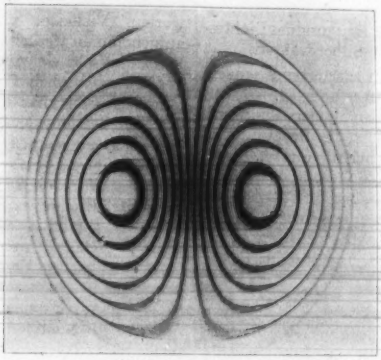


Fig. 9.
Beugungsstreifen und Gabelung der Schattenlinien
(etwa $1\frac{1}{2}$ mal vergrößert).

Fig. 10.
Im linken Quellpunkt liegt eine Schliere.

Fig. 11.
Schleiffehler.

treten. Auch brauchen sie verschiedene Hilfslinsen, die allerlei Korrekturen nötig machen. Unsere Rastermethode dagegen braucht außer der zu untersuchenden Linse nur ein Blendloch und ein Gitter.

Felix Jentzsch (Berlin), Beugung des Lichtes an Stahlschneiden und Silberdrähten.

Vortragender gab einen zusammenfassenden Bericht über zwei inzwischen an anderer Stelle bereits erschienene Experimentaluntersuchungen.

1. Felix Jentzsch, Über die Beugung des Lichtes an Stahlschneiden. Ann. d. Phys. **84**, 292—312, 1927.
2. Hans Pfenninger, Über die Polarisation von Lichtwellen am metallischen Kreiszylinder. Berliner Dissertation 1927, 44 S. und Ann. d. Phys. **83**, 753—796, 1927.

Diskussion.

Herr W. Wien: Es freut mich, daß die alten Beobachtungen über die Beugung des Lichtes an Metallschneiden, die weder experimentell noch theoretisch abgeschlossen waren, in so erfreulicher Weise wieder aufgenommen werden. Meine alten Beobachtungen enthielten noch eine Lücke. Da sich nämlich ein Zusammenhang zwischen der Farbe des bei großen Winkeln gebeugten Lichtes und den Konstanten der Metallreflexion ergeben hatte, so ist im Hinblick auf das Kerrphänomen ein Einfluß eines magnetischen Feldes auf die Polarisation des gebeugten Lichtes zu erwarten. Vielleicht könnten derartige Versuche aufgenommen werden. Die Beugung bei langen Wellen ist sehr vielversprechend, weil dann nach der Maxwellschen Theorie ein Einfluß der Leitfähigkeit bemerkbar sein müßte. Es ist nur zu fürchten, daß diese Versuche Intensitätsschwierigkeiten finden werden.

Herr Jentzsch: Beobachtungen über die Beugung an magnetisierten Metallschneiden sowie stromdurchflossenen Drähten sind in der Tat seinerzeit geplant gewesen, aber nicht zur Ausführung gelangt, weil die geringe Größe des magnetooptischen Kerreffektes keinen Erfolg zu versprechen schien.

Beugungsversuche im Ultraroten erscheinen mir deshalb besonders aussichtsvoll, weil ich ein neues Spiegelspektrometer konstruiert habe, das rechnerisch die ca. 40fache Intensität der Rubensschen Spiegel liefern soll. Hierüber wird später berichtet werden.

BESPRECHUNGEN.

F. Eisenlohr, Der molekulare Brechungsexponent in der Reihe der Polymethylenverbindungen. (Fortschr. der Chemie, Physik und phys. Chemie, Bd. 18, Heft 9.) Gr. 8°. 48 S. Berlin, Gebr. Borntraeger. 1925. M. 4.20.

Eine hauptsächlich für den organischen Chemiker in ihren Resultaten interessante Anwendung der in den Händen des Verfassers sehr ausgebildeten Methode auf spezielle Konstitutionsfragen.

G.-M. Schwab.

H. J. Gramatzki, Leitfaden der astronomischen Beobachtung. 8°. 111 S. Mit 35 Abbildungen und 3 Tafeln. Berlin u. Bonn, Ferd. Dümmler. 1928. M. 3.50, geb. 4.50.

Der Verf. gibt eine recht brauchbare populäre Anleitung für die Ausführung einfacher astronomischer Beobachtungen mit bloßem Auge und mit kleineren Fernrohren (unter anderen Sternschnuppen, Planetenoberflächen, Sternhelligkeiten und Sternfarben, letztere auch unter Benutzung von Hilfsapparaten).

A. Kopff.

Berichtigung.

In dem Vortrag von Alfons Bühl „Über das Diffusionspotential und die Dissoziation der Salzsäure" (diese Zeitschrift **28**, Seite 767—770) bezieht sich die Ziffer [1]) auf der Seite 767, rechte Spalte, Zeile 2 von oben, auf die Anmerkung 1 der linken Spalte. Lies ferner auf derselben Seite, rechte Spalte, 20. Zeile von unten,

$$A_C = (u_C + v_C) A_C \quad \text{statt} \quad A_C = (uC + vC) A_C$$

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Ernannt: Der Privatdozent an der Deutschen Universität Prag Dr. Reinhold Fürth zum etatsmäßigen a. o. Professor der theoretischen Physik ebenda, der ord. Professor der Experimentalphysik an der Universität Halle Dr. Gustav Hertz in gleicher Eigenschaft an der Technischen Hochschule Berlin, der a. o. Professor an der Universität Breslau Dr. Lothar Koschmieder zum ord. Professor der Mathematik an der Deutschen Technischen Hochschule Brünn, der Privatdozent für Physik an der Universität Marburg Dr. Rudolf Tomaschek zum a. o. Professor ebenda.

Lehrauftrag: Der Privatdozent für theoretische Physik an der Universität Frankfurt Dr. G. Lanczos für das Wintersemester 1927/28 mit einer vierstündigen Vorlesung über theoretische Optik an der Universität Würzburg beauftragt.

Gestorben: Der frühere Rektor der Universität Madrid Professor der Chemie Dr. José Rodriguez Carracida.

Für die Schriftleitung verantwortlich Prof. Dr. F. Harms in Würzburg. — Verlag S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.